Soit E un ensemble et A, B et C trois de ses parties.

Démontrer l'équivalence :

$$\begin{cases} A\bigcup B = A\bigcup C \\ A\bigcap B = A\bigcap C \end{cases} \Leftrightarrow \; B = C$$

Analyse

La condition suffisante est … immédiate !
Pour établir l'implication réciproque, on notera que les parties B et C jouent des rôles symétriques et qu'il suffit donc d'établir une seule inclusion.

Résolution

$\boxed{\Leftarrow}$
Immédiat.

$\boxed{\Rightarrow}$
Comme les parties B et C jouent des rôles symétriques, il nous suffit de montrer $B \subset C$.

Soit donc x un élément de B.
On distingue deux situations :

- $x \in A$
  Donc $x \in A\bigcap B$.
  Comme $A\bigcap B = A\bigcap C$, on a donc : $x \in A\bigcap C$ et donc $x \in C$.

- $x \notin A$
  En tant qu'élément de B, x appartient à $A\bigcup B$.
  Comme $A\bigcup B = A\bigcup C$, on a donc $x \in A\bigcup C$.
  Mais alors, comme x n'est pas un élément de A, c'est un élément de C.

En définitive, dans les deux situations, on a : $x \in C$.

Le raisonnement précédent étant valable pour un élément quelconque de B, on a : $B \subset C$.

Résultat final

Si A, B et C sont trois parties d'un ensemble, on a :

$$\begin{cases} A \bigcup B = A \bigcup C \\ A \bigcap B = A \bigcap C \end{cases} \Leftrightarrow \quad B = C$$