Soit E un ensemble et A et B deux de ses parties.
On définit la « différence symétrique de A et B », notée $A \Delta B$, par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Montrer que l'on a :

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

Analyse

Un petit exercice simple sur la différence symétrique pour se familiariser un peu avec cette notion.

Résolution

On a :

$$\begin{aligned}
A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) & & \\
&= (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} & & (\text{définition de la différence}) \\
&= (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) & & (\text{loi de Morgan}) \\
&= \left[(A \cup B) \cap \bar{A}\right] \cup \left[(A \cup B) \cap \bar{B}\right] & & (\text{distributivité de } \cap \text{ sur } \cup) \\
&= \left[(A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A})\right] \cup \left[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B})\right] & & (\text{distributivité de } \cap \text{ sur } \cup \text{ encore ...}) \\
&= (A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B}) & & (\text{associativité de l'union}) \\
&= \varnothing \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) \cup \varnothing & & (\text{définition du complémentaire}) \\
&= (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) & & (\text{neutralité de } \varnothing \text{ pour l'union})
\end{aligned}$$

Résultat final

Pour tout ensemble E, on a :

$$\forall (A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2, A \Delta B = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B})$$