Soit E un ensemble et A et B deux de ses parties.

Résoudre dans $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ les équations d'inconnue X :

$$\mathrm{A} \bigcup \mathrm{X} = \mathrm{B} \text{ et } \mathrm{A} \bigcap \mathrm{X} = \mathrm{B}$$

Analyse

Le genre d'exercice où un petit dessin (quelques « patates » qu'il convient d'appeler rigoureusement « diagramme de VENN » pour rendre hommage à son inventeur, même si EULER fut le premier à illustrer les connecteurs logiques à l'aide de graphiques symboliques, des cercles en l'occurrence.) peut s'avérer très utile.

Résolution

$\boxed{\mathrm{A} \bigcup \mathrm{X} = \mathrm{B}}$

Remarquons, dans un premier temps, que l'on a : $\mathrm{A} \subset \mathrm{A} \bigcup \mathrm{X}$.
On a donc : $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{X} = \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A} \subset \mathrm{B}$.

On distingue de fait deux situations :

- Si $\mathrm{A} \not\subset \mathrm{B}$ alors l'équation n'admet pas de solution.
- Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ alors l'équation admet peut-être des solutions.
  Dans cette seconde situation, on pose : $\mathrm{B} = \mathrm{A} \bigcup (\mathrm{B} / \mathrm{A})$, les ensembles A et B / A étant, par définition, disjoints.
  On a alors : $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{X} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} \bigcup \mathrm{X} = \mathrm{A} \bigcup (\mathrm{B} / \mathrm{A})$.
  On écrit alors : $\mathrm{X} = (\mathrm{X} \bigcap \mathrm{A}) \bigcup (\mathrm{X} / \mathrm{A})$ et on a :

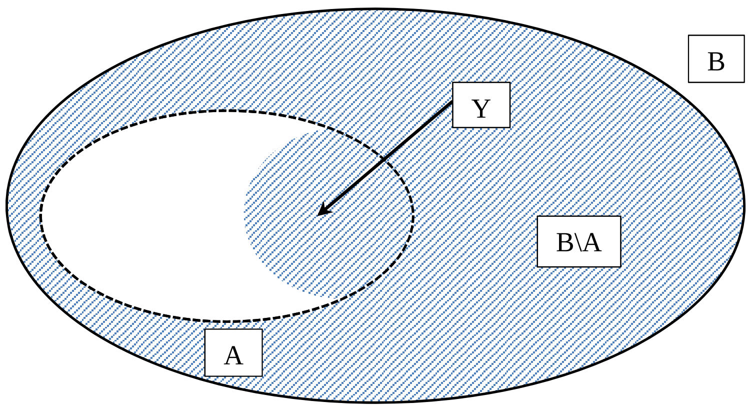
$$\begin{aligned} & \mathrm{A} \bigcup \mathrm{X} = \mathrm{B} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{A} \bigcup \mathrm{X} = \mathrm{A} \bigcup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{A} \bigcup \left[(\mathrm{X} \bigcap \mathrm{A}) \bigcup (\mathrm{X} \setminus \mathrm{A}) \right] = \mathrm{A} \bigcup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{A} \bigcup (\mathrm{X} \setminus \mathrm{A}) = \mathrm{A} \bigcup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{X} \setminus \mathrm{A} = \mathrm{B} \setminus \mathrm{A} \end{aligned}$$

  Il vient alors : $\mathrm{X} = (\mathrm{X} \bigcap \mathrm{A}) \bigcup (\mathrm{X} \setminus \mathrm{A}) = (\mathrm{X} \bigcap \mathrm{A}) \bigcup (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A})$.

Ainsi, toute solution de l'équation est la réunion de $B \setminus A$ et d'une partie <u>quelconque</u> de A (correspondant à $X \cap A$ dans l'égalité précédente).

Finalement :

Si $A \not\subset B$ alors l'équation $A \cup X = B$ n'admet pas de solution.   Si $A \subset B$, on a : $A \cup X = B \Leftrightarrow X = Y \cup (B \setminus A)$ où $Y \subset A$.



Sur cette figure, la partie X est hachurée en bleu. Elle est la réunion des parties disjointes Y (incluse dans A) et B\A.

$\boxed{A \cap X = B}$

Comme précédemment, remarquons que l'on a : $A \cap X \subset A$.
On a donc : $A \cap X = B \Rightarrow B \subset A$.

On distingue encore deux situations :

- Si $B \not\subset A$ alors l'équation n'admet pas de solution.
- Si $B \subset A$ alors l'équation admet peut-être des solutions.
  On peut se ramener au cas précédent grâce aux équivalences :

$$A \cap X = B \Leftrightarrow \overline{A \cap X} = \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{X} = \overline{B}$$

Comme $B \subset A$, on a $\overline{A} \subset \overline{B}$. D'après la question précédente, l'équation $\overline{A} \cup \overline{X} = \overline{B}$ admet alors pour solutions les parties $\overline{X}$ de la forme $\overline{X} = Y \cup (\overline{B} \setminus \overline{A})$ avec $Y \subset \overline{A}$.

On a alors : $X = \overline{Y \cup (\overline{B} \setminus \overline{A})} = \overline{Y} \cap \overline{(\overline{B} \setminus \overline{A})} = \overline{Y} \cap \overline{(\overline{B} \cap A)} = \overline{Y} \cap (B \cup \overline{A})$ avec $A \subset \overline{Y}$.

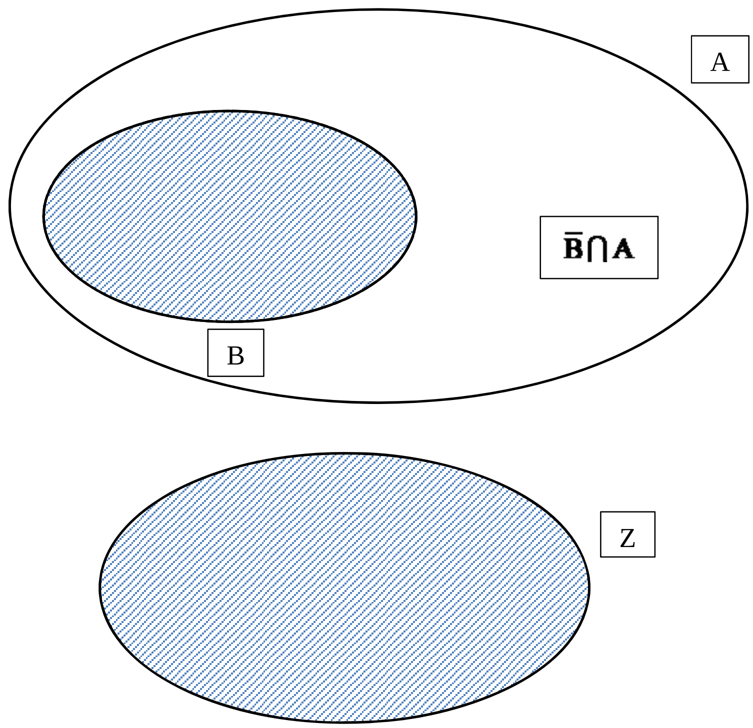
Mais : $\overline{Y} \cap (B \cup \overline{A}) = (\overline{Y} \cap B) \cup (\overline{Y} \cap \overline{A})$.

Comme $B \subset A$ et $A \subset \overline{Y}$, il vient $B \subset \overline{Y}$ et donc $\overline{Y} \cap B = B$.

Ainsi : $X = B \cup \left(\overline{Y} \cap \overline{A} \right)$ avec $\overline{Y}$ une partie quelconque contenant A. De fait, $\overline{Y} \cap \overline{A}$ est une partie quelconque de $\overline{A}$ et il vient finalement : $X = B \cup Z$ où Z est une partie quelconque de $\overline{A}$.

Finalement :

Si $B \not\subset A$ alors l'équation $A \cap X = B$ n'admet pas de solution.
Si $B \subset A$, on a : $B \subset A \Leftrightarrow X = B \cup Z$ où $Z \subset \overline{A}$.



Sur cette figure, la partie X est hachurée en bleu. Elle est la réunion des parties disjointes Z (incluse dans $\overline{A}$) et B.