Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.

Comparer $\mathrm{F}\bigcap\left(\mathrm{G}+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)\right)$ et $\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{G}\right)+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)$.

Analyse

En général, on n'a pas $\mathrm{F}\bigcap\left(\mathrm{G}+\mathrm{H}\right)=\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{G}\right)+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)$! (considérez, par exemple, trois droites non parallèles deux à deux d'un plan vectoriel)
La situation proposée est légèrement différente et … l'intersection « $\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}$ » change tout !
Ainsi, il convient bien de montrer l'égalité de $\mathrm{F}\bigcap\left(\mathrm{G}+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)\right)$ et de $\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{G}\right)+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)$.
Egalité que nous établissons « tranquillement » par double inclusion.

Résolution

Soit $x\in\mathrm{F}\bigcap\left(\mathrm{G}+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)\right)$.

On a $x\in\mathrm{F}$ et $x\in\mathrm{G}+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)$.
Comme $x\in\mathrm{G}+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)$, on peut écrire : $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in\mathrm{G}$ et $x_2\in\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}$.
Il vient alors : $x_1=x-x_2$ avec $x\in\mathrm{F}$ et $x_2\in\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\subset\mathrm{F}$.
Comme F est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit $x-x_2\in\mathrm{F}$, soit $x_1\in\mathrm{F}$.
Comme $x_1\in\mathrm{G}$ et $x_1\in\mathrm{F}$, on a, en définitive : $x_1\in\mathrm{F}\bigcap\mathrm{G}$.

Ainsi, on a : $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in\mathrm{F}\bigcap\mathrm{G}$ et $x_2\in\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}$, soit : $x\in\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{G}\right)+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)$.

On a donc : $\underline{\mathrm{F}\bigcap\left(\mathrm{G}+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)\right)\subset\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{G}\right)+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)}$.

Soit maintenant $x\in\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{G}\right)+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)$.

On peut écrire : $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in\mathrm{F}\bigcap\mathrm{G}$ et $x_2\in\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}$.
Comme $x_1\in\mathrm{F}\bigcap\mathrm{G}\subset\mathrm{F}$ et $x_2\in\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\subset\mathrm{F}$ et comme F est un sous-espace vectoriel de E, il vient : $x_1+x_2=x\in\mathrm{F}$.
Par ailleurs, $x_1\in\mathrm{F}\bigcap\mathrm{G}\subset\mathrm{G}$ et $x_2\in\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}$ donc $x_1+x_2=x\in\mathrm{G}+\left(\mathrm{F}\bigcap\mathrm{H}\right)$.

Ainsi, on a : $x \in \mathrm{F}$ et $x \in \mathrm{G} + (\mathrm{F} \cap \mathrm{H})$ d'où : $x \in \mathrm{F} \cap (\mathrm{G} + (\mathrm{F} \cap \mathrm{H}))$.

On a donc : $\underline{(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) + (\mathrm{F} \cap \mathrm{H}) \subset \mathrm{F} \cap (\mathrm{G} + (\mathrm{F} \cap \mathrm{H}))}$.

Résultat final

Si F, G et H sont trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, on a :

$$\mathrm{F} \cap (\mathrm{G} + (\mathrm{F} \cap \mathrm{H})) = (\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) + (\mathrm{F} \cap \mathrm{H})$$