

Soit  $\mathbb{R}$  considéré comme un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.

1. Montrer que la famille  $\{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}\}$  est libre.
2. Montrer que la famille  $\{\ln p / p \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ premier}\}$  est libre.

---

## Analyse

Rappelons, pour la première question, que les réels  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$  sont irrationnels.  
Dans la deuxième question, les propriétés algébriques du logarithme népérien nous permettent de « transformer » le problème d'algèbre linéaire en un « problème » d'arithmétique ...

---

## Résolution

### Question 1.

Soit  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois rationnels tels que  $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$ .

On a donc :  $\beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = -\alpha$  puis, en élevant au carré :  $2\beta^2 + 3\gamma^2 + \beta\gamma\sqrt{6} = (-\alpha)^2 = \alpha^2$ .

D'où :  $\beta\gamma\sqrt{6} = \alpha^2 - 2\beta^2 - 3\gamma^2$ .

Si on suppose  $\beta\gamma \neq 0$ , il vient :  $\sqrt{6} = \frac{\alpha^2 - 2\beta^2 - 3\gamma^2}{\beta\gamma} \in \mathbb{Q}$ , ce qui est absurde puisque le réel

$\sqrt{6}$  n'est pas rationnel.

On a donc  $\beta = 0$  ou  $\gamma = 0$ .

Supposons, par exemple :  $\beta = 0$ .

On a alors :  $\alpha + \gamma\sqrt{3} = 0$  puis, nécessairement,  $\gamma = 0$  (sans quoi  $\sqrt{3} = -\frac{\alpha}{\gamma} \in \mathbb{Q}$ , ce qui est

absurde puisque  $\sqrt{3}$  est irrationnel) et, enfin,  $\alpha = 0$ .

On raisonne de façon similaire en supposant  $\gamma = 0$ .

En définitive :  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  et la famille  $\{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}\}$  est libre.

La famille  $\{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}\}$  est libre.

## Question 2.

Soit  $\{p_1 ; p_2 ; p_3 ; \dots ; p_n\}$  une famille finie quelconque d'entiers naturels premiers et  $\{\ln p_1 ; \ln p_2 ; \ln p_3 ; \dots ; \ln p_n\}$  la famille associée de leurs logarithmes népériens.

Soit alors  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$   $n$  rationnels tels que :  $\alpha_1 \ln p_1 + \alpha_2 \ln p_2 + \dots + \alpha_n \ln p_n = 0$  (E).

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\alpha_1 \ln p_1 + \alpha_2 \ln p_2 + \dots + \alpha_n \ln p_n &= 0 \\ \Leftrightarrow \ln p_1^{\alpha_1} + \ln p_2^{\alpha_2} + \dots + \ln p_n^{\alpha_n} &= 0 \\ \Leftrightarrow \ln(p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}) &= \ln 1 \\ \Leftrightarrow p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} &= 1\end{aligned}$$

Supposons que les  $\alpha_i$  ne soient pas tous nuls.

En supposant chaque  $\alpha_i$  écrit sous la forme  $\frac{a_i}{b_i}$  avec  $(a_i, b_i) \in (\mathbb{Z}, \mathbb{N}^*)$  avec  $a_i$  et  $b_i$  premiers entre eux, on peut considérer  $m = \text{PPCM}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ . On a alors :

$$\begin{aligned}p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} &= 1 \\ \Leftrightarrow (p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n})^m &= 1^m \\ \Leftrightarrow p_1^{m\alpha_1} \times p_2^{m\alpha_2} \times \dots \times p_n^{m\alpha_n} &= 1 \\ \Leftrightarrow p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_n^{\beta_n} &= 1\end{aligned}$$

où les  $\beta_i$  sont des entiers.

Comme tous les  $p_i$  sont supérieurs ou égaux à 2, leurs logarithmes népériens sont strictement positifs et, nécessairement, l'égalité (E) entraîne que certains  $\alpha_i$  (et les  $\beta_i$  correspondants) sont strictement négatifs et d'autres strictement positifs. On a donc :

$$\begin{aligned}p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_n^{\beta_n} &= 1 \\ \Leftrightarrow \prod_{\beta_i > 0} p_i^{\beta_i} &= \prod_{\beta_j < 0} p_j^{-\beta_j}\end{aligned}$$

On obtient ainsi deux décompositions en facteurs premiers égales alors que les facteurs premiers apparaissant dans chacune d'elles sont différents. Ceci est absurde (cf. le théorème fondamental de l'arithmétique) et on en conclut que tous les  $\alpha_i$ , sont tous nuls. Ainsi, la famille  $\{\ln p_1 ; \ln p_2 ; \ln p_3 ; \dots ; \ln p_n\}$  est libre.

Ce qui précède étant valable pour une famille  $\{\ln p_1 ; \ln p_2 ; \ln p_3 ; \dots ; \ln p_n\}$  finie quelconque, on en déduit finalement que la famille  $\{\ln p / p \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ premier}\}$  est libre.

La famille  $\{\ln p / p \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ premier}\}$  est libre.