

Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$, $F = \{P \in E / P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$,
 $G = \{P \in E / P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $H = \{P \in E / P(X) = P(-X)\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E / P(1) = P(2) = 0\}$.
2. Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Analyse

Des manipulations polynomiales autour de la notion de somme directe.

Dans la première question, on procède à une double inclusion après avoir montré que la somme $F + G$ était directe.

Dans la seconde question, on montre que tout polynôme de E s'écrit de façon unique comme somme d'un polynôme de F , d'un polynôme de G et d'un polynôme de H .

Résolution

Question 1.

Notons, dans un premier temps, que la somme $F + G$ est bien directe.

En effet, travaillant dans $E = \mathbb{K}_3[X]$, on a :

$$P \in F \cap G \Leftrightarrow P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0 \Leftrightarrow P = 0$$

On a bien : $F + G = F \oplus G$.

Soit maintenant P un élément de $F \oplus G$.

P s'écrit de façon unique : $P = P_F + P_G$ où P_F et P_G sont respectivement dans F et G .

On a donc : $P_F(0) = P_F(1) = P_F(2) = 0$ et $P_G(1) = P_G(2) = P_G(3) = 0$.

On en tire immédiatement :

$$P(1) = P_F(1) + P_G(1) = 0 + 0 = 0$$

$$P(2) = P_F(2) + P_G(2) = 0 + 0 = 0$$

Ainsi, on a : $P \in \{P \in E / P(1) = P(2) = 0\}$.

Donc : $F \oplus G \subset \{P \in E / P(1) = P(2) = 0\}$.

Soit maintenant un polynôme P de E tel que $P(1) = P(2) = 0$.

On a : $P(X) = (X-1)(X-2)(aX+b)$ où a et b sont deux éléments de \mathbb{K} .

On peut alors écrire : $aX + b = \alpha(X-3) + \beta X$.

Une identification donne immédiatement : $aX + b = -\frac{b}{3}(X-3) + \left(a + \frac{b}{3}\right)X$.

Alors :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X-1)(X-2)(aX+b) \\ &= (X-1)(X-2) \left[-\frac{b}{3}(X-3) + \left(a + \frac{b}{3}\right)X \right] \\ &= \underbrace{-\frac{b}{3}(X-1)(X-2)(X-3)}_{\in F} + \underbrace{\left(a + \frac{b}{3}\right)X(X-1)(X-2)}_{\in G} \end{aligned}$$

On a donc $P \in F \oplus G$.

Ainsi : $\{P \in E / P(1) = P(2) = 0\} \subset F \oplus G$.

Finalement :

$$F \oplus G = \{P \in E / P(1) = P(2) = 0\}$$

Question 2.

Soit P un polynôme de E . On cherche à l'écrire sous la forme : $P = P_F + P_G + P_H$ où P_F , P_G et P_H sont respectivement dans F , G et H .

Posons : $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

Un élément de H ne comportant que des monômes de degré pair, on peut écrire tout élément de $F+G+H$ sous la forme :

$$\alpha X(X-1)(X-2) + \beta(X-1)(X-2)(X-3) + \gamma X^2 + \delta$$

Comme les polynômes de E sont au plus de degré 3, pour que le polynôme ci-dessus soit égal à P , il faut, et il suffit, qu'ils prennent les mêmes valeurs pour quatre valeurs distinctes de l'indéterminée.

En choisissant 0, 1, 2 et 3, on obtient :

$$P(X) = \alpha X(X-1)(X-2) + \beta(X-1)(X-2)(X-3) + \gamma X^2 + \delta$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(0) = d = -6\beta + \delta \\ P(1) = a + b + c + d = \gamma + \delta \\ P(2) = 8a + 4b + 2c + d = 4\gamma + \delta \\ P(3) = 27a + 9b + 3c + d = 6\alpha + 9\gamma + \delta \end{cases}$$

La deuxième et la troisième égalités nous permettent d'obtenir γ et δ . La première nous donne ensuite β et la quatrième α .

Ainsi, les coefficients α , β , γ et δ existent et sont uniques. La décomposition de P sous la forme $P = P_F + P_G + P_H$ où P_F , P_G et P_H sont respectivement dans F, G et H existe et est unique. On en déduit immédiatement :

$$E = F \oplus G \oplus H$$