Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie.

Soit H et K deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k)$ une base de K.

1. Montrer que : $\forall \vec{a} \in \mathrm{H}, \mathrm{K}_{\vec{a}} = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1 + \vec{a}, \vec{e}_2 + \vec{a}, ..., \vec{e}_k + \vec{a})$ est un supplémentaire de H dans E.
2. Montrer que : $\forall (\vec{a}, \vec{b}) \in \mathrm{H}^2, \vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \mathrm{K}_{\vec{a}} \neq \mathrm{K}_{\vec{b}}$.

Analyse

Un exercice qui illustre spectaculairement le fait qu'un supplémentaire n'est en rien unique et qui donne, plus spécifiquement, un moyen simple d'en « fabriquer » autant qu'on le souhaite ! On utilise plusieurs fois le fait qu'un sous-espace vectoriel et un supplémentaire de cet espace admettent une intersection réduite au vecteur nul.

Résolution

Question 1.

Soit $\vec{a} \in \mathrm{H}$.

Dans un premier temps, montrons que l'on a : $\mathrm{H} \cap \mathrm{K}_{\vec{a}} = \{\vec{0}_{\mathrm{E}}\}$.

Soit $\vec{x} \in \mathrm{H} \cap \mathrm{K}_{\vec{a}}$.

Comme $\mathrm{K}_{\vec{a}} = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1 + \vec{a}, \vec{e}_2 + \vec{a}, ..., \vec{e}_k + \vec{a})$ alors il existe k scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ tels que :

$$\vec{x} = \alpha_1 (\vec{e}_1 + \vec{a}) + \alpha_2 (\vec{e}_2 + \vec{a}) + ... + \alpha_k (\vec{e}_k + \vec{a})$$

On en tire : $\vec{x} - (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_k\vec{e}_k$.

Comme $\vec{x}$ et $\vec{a}$ sont deux vecteurs de H, il en va de même pour la combinaison linéaire $\vec{x} - (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k)\vec{a}$ et donc pour le vecteur $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_k\vec{e}_k$. Mais ce dernier est une combinaison linéaire des $\vec{e}_i$ et est donc un vecteur de K.

Ainsi, on en tire que $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_k\vec{e}_k$ appartient à $\mathrm{H}\cap\mathrm{K}$.
Or H et K sont supplémentaires dans E. Leur intersection est donc réduite au vecteur nul.
On a donc : $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_k\vec{e}_k=\vec{0}_{\mathrm{E}}$.
Mais comme $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_k)$ est une base de K, l'égalité $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_k\vec{e}_k=\vec{0}_{\mathrm{E}}$ entraîne $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0$.
Il vient finalement : $\vec{x}=\alpha_1(\vec{e}_1+\vec{a})+\alpha_2(\vec{e}_2+\vec{a})+...+\alpha_k(\vec{e}_k+\vec{a})=\vec{0}_{\mathrm{E}}$.

On a bien : $\mathrm{H}\cap\mathrm{K}_{\vec{a}}=\{\vec{0}_{\mathrm{E}}\}$.

Il convient maintenant de montrer que l'on a : $\mathrm{H}+\mathrm{K}_{\vec{a}}=\mathrm{E}$

Soit $\vec{x}$ un vecteur de E.
Comme $\mathrm{H}\oplus\mathrm{K}=\mathrm{E}$, il existe un unique couple $(\vec{x}_{\mathrm{H}},\vec{x}_{\mathrm{K}})$ de $\mathrm{H}\times\mathrm{K}$ tel que $\vec{x}=\vec{x}_{\mathrm{H}}+\vec{x}_{\mathrm{K}}$.
Il existe également un unique *k*-uplet de scalaires $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ tels que $\vec{x}_{\mathrm{K}}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_k\vec{e}_k$.
On a donc : $\vec{x}=\vec{x}_{\mathrm{H}}+\vec{x}_{\mathrm{K}}=\vec{x}_{\mathrm{H}}+\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_k\vec{e}_k$.
Il vient alors :

$$\begin{aligned}\vec{x}&=\vec{x}_{\mathrm{H}}+\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+...+\alpha_k\vec{e}_k\\&=\vec{x}_{\mathrm{H}}+\alpha_1(\vec{e}_1+\vec{a})+\alpha_2(\vec{e}_2+\vec{a})+...+\alpha_k(\vec{e}_k+\vec{a})-\alpha_1\vec{a}-\alpha_2\vec{a}-...-\alpha_k\vec{a}\\&=\underbrace{\left[\vec{x}_{\mathrm{H}}-(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k)\vec{a}\right]}_{\in\mathrm{H}}+\underbrace{\left[\alpha_1(\vec{e}_1+\vec{a})+\alpha_2(\vec{e}_2+\vec{a})+...+\alpha_k(\vec{e}_k+\vec{a})\right]}_{\in\mathrm{K}_{\vec{a}}}\end{aligned}$$

On a ainsi décomposé le vecteur $\vec{x}$ en la somme d'un vecteur de H et d'un vecteur de $\mathrm{K}_{\vec{a}}$.
On a bien : $\mathrm{H}+\mathrm{K}_{\vec{a}}=\mathrm{E}$.

En définitive : $\mathrm{H}\oplus\mathrm{K}_{\vec{a}}=\mathrm{E}$.

Le résultat étant obtenu pour n'importe quel vecteur $\vec{a}$ de E, on en conclut finalement :

Pour tout vecteur $\vec{a}$ de E, $\mathrm{K}_{\vec{a}}$ est un supplémentaire de H dans E.

Remarque :
Pour la deuxième partie de la démonstration, comme la famille $\{\vec{e}_1+\vec{a},\vec{e}_2+\vec{a},...,\vec{e}_k+\vec{a}\}$ comporte $k=\dim\mathrm{K}$ vecteurs, on pouvait également montrer qu'il s'agissait d'une famille libre et, de fait, d'une base de $\mathrm{K}_{\vec{a}}$. E étant de dimension finie, on concluait à l'identique.

Question 2.

Nous allons en fait montrer ici la contraposée.
Soit donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de H.
Nous supposons : $\mathrm{K}_{\vec{a}} = \mathrm{K}_{\vec{b}}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Vect}\left(\vec{e}_1 + \vec{a}, \vec{e}_2 + \vec{a}, ..., \vec{e}_k + \vec{a}\right) = \mathrm{Vect}\left(\vec{e}_1 + \vec{b}, \vec{e}_2 + \vec{b}, ..., \vec{e}_k + \vec{b}\right)$$

Soit $\vec{x} \in \mathrm{K}_{\vec{a}}$ alors il existe *k* scalaires $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ tels que :

$$\vec{x} = \alpha_1\left(\vec{e}_1 + \vec{a}\right) + \alpha_2\left(\vec{e}_2 + \vec{a}\right) + ... + \alpha_k\left(\vec{e}_k + \vec{a}\right)$$

Comme $\mathrm{K}_{\vec{a}} = \mathrm{K}_{\vec{b}}$, on a aussi $\vec{x} \in \mathrm{K}_{\vec{b}}$ alors il existe *k* scalaires $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ tels que :

$$\vec{x} = \beta_1\left(\vec{e}_1 + \vec{a}\right) + \beta_2\left(\vec{e}_2 + \vec{a}\right) + ... + \beta_k\left(\vec{e}_k + \vec{a}\right)$$

On a donc :

$$\vec{x} = \alpha_1\left(\vec{e}_1 + \vec{a}\right) + \alpha_2\left(\vec{e}_2 + \vec{a}\right) + ... + \alpha_k\left(\vec{e}_k + \vec{a}\right) = \beta_1\left(\vec{e}_1 + \vec{a}\right) + \beta_2\left(\vec{e}_2 + \vec{a}\right) + ... + \beta_k\left(\vec{e}_k + \vec{a}\right)$$

D'où :

$$\left(\alpha_1 - \beta_1\right)\vec{e}_1 + \left(\alpha_2 - \beta_2\right)\vec{e}_2 + ... + \left(\alpha_k - \beta_k\right)\vec{e}_k = -\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k\right)\vec{a} + \left(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_k\right)\vec{b}$$

On a : $\left(\alpha_1 - \beta_1\right)\vec{e}_1 + \left(\alpha_2 - \beta_2\right)\vec{e}_2 + ... + \left(\alpha_k - \beta_k\right)\vec{e}_k \in \mathrm{K}$ et
$-\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k\right)\vec{a} + \left(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_k\right)\vec{b} \in \mathrm{H}$.
Comme $\mathrm{H} \oplus \mathrm{K} = \mathrm{E}$, on en déduit :

$$\left(\alpha_1 - \beta_1\right)\vec{e}_1 + \left(\alpha_2 - \beta_2\right)\vec{e}_2 + ... + \left(\alpha_k - \beta_k\right)\vec{e}_k = -\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k\right)\vec{a} + \left(\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_k\right)\vec{b} = \vec{0}$$

Comme $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k\right)$ est une base de K, l'égalité
$\left(\alpha_1 - \beta_1\right)\vec{e}_1 + \left(\alpha_2 - \beta_2\right)\vec{e}_2 + ... + \left(\alpha_k - \beta_k\right)\vec{e}_k = \vec{0}_{\mathrm{E}}$ entraîne $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_k - \beta_k = 0$ et on a donc : $\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k\right)\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{0}$.
Le vecteur $\vec{x}$ ayant été choisi quelconque dans $\mathrm{K}_{\vec{a}}$, cette égalité est valable pour tout *k*-uplet $\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\right)$. Il en découle $\vec{a} = \vec{b}$.

Finalement : $\mathrm{K}_{\vec{a}} = \mathrm{K}_{\vec{b}} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}$.

On a bien :

$$\boxed{\vec{a} \neq \vec{b} \Rightarrow \mathrm{K}_{\vec{a}} \neq \mathrm{K}_{\vec{b}}}$$