Soit $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p\right)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E.

Montrer que $\forall \vec{a} \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{Vect}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p\right), \left(\vec{e}_1 + \vec{a}, \vec{e}_2 + \vec{a}, ..., \vec{e}_p + \vec{a}\right)$ est une famille libre de E.

Analyse

On forme une combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille $\left(\vec{e}_1 + \vec{a}, \vec{e}_2 + \vec{a}, ..., \vec{e}_p + \vec{a}\right)$.

Résolution

Soit $\vec{a} \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{Vect}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p\right)$

Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p$ p scalaires de $\mathbb{K}$ tels que : $\alpha_1\left(\vec{e}_1 + \vec{a}\right) + \alpha_2\left(\vec{e}_2 + \vec{a}\right) + ... + \alpha_p\left(\vec{e}_p + \vec{a}\right) = \vec{0}$.
On a alors : $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_p\vec{e}_p = -\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p\right)\vec{a}$.
Le vecteur $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_p\vec{e}_p$ appartient, par définition, à $\mathrm{Vect}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p\right)$. Or, le vecteur $-\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p\right)\vec{a}$ appartient lui à $\mathrm{Vect}\left(\vec{a}\right)$.
Mais comme $\vec{a} \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{Vect}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p\right)$, on a $\mathrm{Vect}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p\right) \cap \mathrm{Vect}\left(\vec{a}\right) = \left\{\vec{0}\right\}$ et donc $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_p\vec{e}_p = \vec{0}$.
La famille $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p\right)$ étant, par hypothèse, libre, il vient immédiatement $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$ et on en déduit que la famille $\left(\vec{e}_1 + \vec{a}, \vec{e}_2 + \vec{a}, ..., \vec{e}_p + \vec{a}\right)$ est libre.
Le résultat est ainsi établi.

Résultat final

Si $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p\right)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E, alors pour tout vecteur $\vec{a}$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p\right)$, la famille $\left(\vec{e}_1 + \vec{a}, \vec{e}_2 + \vec{a}, ..., \vec{e}_p + \vec{a}\right)$ est libre.