

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergentes.
Soit F et G respectivement les sous-ensembles de E des suites réelles respectivement constantes et convergeant vers 0.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

Analyse

On montre sans difficulté que F et G sont non vides et stables par combinaison linéaire.
Pour montrer que $E = F + G$, on peut facilement construire, à partir d'une suite convergente, une suite convergeant vers 0...

Résolution

Notons dans un premier temps que la suite nulle est constante et donc convergente. Sa limite est bien sûr nulle. Les sous-ensembles F et G de E sont donc non vides.

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles constantes.

Posons alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = k_u$ et $v_n = k_v$.

Pour tout couple (α, β) dans \mathbb{R}^2 et tout entier naturel n , on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha u_n + \beta v_n = \alpha k_u + \beta k_v = \text{cte}$$

F est donc stable par combinaison linéaire.

Soit maintenant (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant vers 0.

Pour tout couple (α, β) dans \mathbb{R}^2 , on a immédiatement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \beta \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$$

G est stable par combinaison linéaire.

Toute suite constante convergeant vers la valeur prise par ses termes, la seule suite constante convergeant vers 0 est la suite nulle. On a donc $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit maintenant (u_n) une suite convergente.

Posons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

La suite $(u_n - L)$ est également convergente et sa limite est nulle.

Pour tout entier naturel n , on peut écrire : $u_n = (u_n - L) + L$.

La suite (u_n) est donc la somme de la suite $(u_n - L)$ de limite nulle et de la suite constante (L) . On a donc $E = F + G$.

Comme $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$, les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E .

Résultat final

Dans l'espace vectoriel des suites réelles convergentes, les sous-espaces vectoriels des suites convergeant vers 0 et des suites constantes sont supplémentaires.