Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1. Soit F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E.
   Montrer que la somme $F_1+F_2+F_3$ est directe si, et seulement si, on a :

$$\begin{cases} (F_1+F_2)\bigcap F_3=\left\{\vec{0}_E\right\} \\ F_1\bigcap F_2=\left\{\vec{0}_E\right\} \end{cases}$$

2. Généraliser le résultat précédent.

Analyse

La caractérisation proposée est à rapprocher de la caractérisation classique :

$F_1, F_2, ..., F_n$ étant n sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} F_i=\bigoplus_{i=1}^{n} F_i \Leftrightarrow \forall j\in[\![1\,;n]\!], \left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} F_i\right)\bigcap F_j=\left\{\vec{0}_E\right\}$$

Dans cet exercice, nous supposons cependant non connue cette caractérisation et fournissons les résultats en nous appuyant uniquement sur la définition d'une somme directe de sous-espaces vectoriels. A vous de le reprendre les démonstrations à l'aide de la caractérisation ci-dessus…

Résolution

Question 1.

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose ici que la somme $F_1+F_2+F_3$ est directe.

En d'autres termes, tout élément $\vec{x}$ de $F_1+F_2+F_3$ se décompose de façon unique comme une somme $\vec{x}_1+\vec{x}_2+\vec{x}_3$ avec $\vec{x}_i\in F_i$.

Soit alors $\vec{x} \in (\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2) \cap \mathrm{F}_3$.
Comme $\vec{x} \in \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$, on peut l'écrire $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ avec $\vec{x}_1 \in \mathrm{F}_1$ et $\vec{x}_2 \in \mathrm{F}_2$.
On a donc $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x} = \vec{0}_\mathrm{E}$. Mais comme $\vec{x} \in \mathrm{F}_3$, $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x} \in \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3$.
Mais comme la somme $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3$ est directe, la décomposition du vecteur nul dans $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3$ est unique et s'écrit : $\vec{0}_\mathrm{E} = \vec{0}_\mathrm{E} + \vec{0}_\mathrm{E} + \vec{0}_\mathrm{E}$. On en déduit : $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = \vec{x} = \vec{0}_\mathrm{E}$.
On a bien : $(\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2) \cap \mathrm{F}_3 = \{\vec{0}_\mathrm{E}\}$.

Soit maintenant $\vec{x} \in \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$.
On a : $\vec{x} = \vec{x}_1 = \vec{x}_2$ avec $\vec{x}_1 \in \mathrm{F}_1$ et $\vec{x}_2 \in \mathrm{F}_2$.
D'où : $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{0}_\mathrm{E} = \vec{0}_\mathrm{E}$.
On utilise encore l'argument de l'unicité de la décomposition du vecteur nul dans $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3$ pour conclure que l'on a : $\vec{x} = \vec{x}_1 = \vec{x}_2 = \vec{0}_\mathrm{E}$.
D'où $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \{\vec{0}_\mathrm{E}\}$.

Le résultat est établi.

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose ici que l'on a : $(\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2) \cap \mathrm{F}_3 = \{\vec{0}_\mathrm{E}\}$ et $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \{\vec{0}_\mathrm{E}\}$.

Soit alors $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 \in \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3$.
Notre objectif est d'établir que cette décomposition est unique.

Supposons qu'il en existe une seconde : $\vec{x} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3 \in \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3$.
On a alors : $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3$ et on en tire : $(\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 - \vec{y}_2) = \vec{y}_3 - \vec{x}_3$.
Comme $(\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 - \vec{y}_2) \in \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$ et $\vec{y}_3 - \vec{x}_3 \in \mathrm{F}_3$ et comme l'intersection de $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$ et F_3 est, par hypothèse, réduite au vecteur nul, on en déduit : $(\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 - \vec{y}_2) = \vec{y}_3 - \vec{x}_3 = \vec{0}_\mathrm{E}$.
On a donc $\vec{y}_3 = \vec{x}_3$, d'une part, et $(\vec{x}_1 - \vec{y}_1) + (\vec{x}_2 - \vec{y}_2) = \vec{0}_\mathrm{E}$, d'autre part, soit : $\vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{y}_2 - \vec{x}_2$.
Comme $\vec{x}_1 - \vec{y}_1 \in \mathrm{F}_1$ et $\vec{y}_2 - \vec{x}_2 \in \mathrm{F}_2$ et comme l'intersection de F_1 et F_2, on en déduit que l'on a : $\vec{x}_1 - \vec{y}_1 = \vec{y}_2 - \vec{x}_2 = \vec{0}_\mathrm{E}$. D'où : $\vec{x}_1 = \vec{y}_1$ et $\vec{x}_2 = \vec{y}_2$.

Ainsi, la décomposition de $\vec{x}$ dans $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3$ est unique.

Le résultat est établi.

F_1, F_2 et F_3 étant trois sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel E, on a :

$$F_1+F_2+F_3=F_1\oplus F_2\oplus F_3 \Leftrightarrow \begin{cases} (F_1+F_2)\cap F_3=\{\vec{0}_E\} \\ F_1\cap F_2=\{\vec{0}_E\} \end{cases}$$

Question 2.

Pour généraliser le résultat précédent, on considère, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $F_1, F_2, ..., F_n$ n sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E et on se propose de montrer :

$$\sum_{i=1}^{n} F_i=\bigoplus_{i=1}^{n} F_i \Leftrightarrow \begin{cases} (F_1+F_2+...+F_{n-1})\cap F_n=\{\vec{0}_E\} \\ (F_1+F_2+...+F_{n-2})\cap F_{n-1}=\{\vec{0}_E\} \\ ... \\ (F_1+F_2)\cap F_3=\{\vec{0}_E\} \\ F_1\cap F_2=\{\vec{0}_E\} \end{cases} \Leftrightarrow \forall k\in[\![1\,;n-1]\!],\left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right)\cap F_{k+1}=\{\vec{0}_E\}$$

$\boxed{\Rightarrow}$

On suppose ici que la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe.

En d'autres termes, tout élément $\vec{x}$ de $\sum_{i=1}^{n} F_i$ se décompose <u>de façon unique</u> comme une somme $\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i$ avec $\vec{x}_i\in F_i$.

Soit alors $k\in[\![1\,;n-1]\!]$ et $\vec{x}\in\left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right)\cap F_{k+1}$.

On a donc $\vec{x}=\sum_{i=1}^{k}\vec{x}_i$ avec $\vec{x}_i\in F_i$. D'où : $\vec{x}_1+\vec{x}_2+...+\vec{x}_k-\vec{x}=\vec{0}_E$.

Mais comme la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe, la décomposition du vecteur nul dans $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est unique et s'écrit : $\vec{0}_E=\sum_{i=1}^{n}\vec{0}_E$.

Or, l'égalité précédemment obtenue se récrit : $\underbrace{\vec{x}_1+\vec{x}_2+...+\vec{x}_k}_{\in\sum_{i=1}^{k} F_i}\underbrace{-\vec{x}}_{\in F_{k+1}}+\sum_{i=k+2}^{n}\vec{0}_E=\vec{0}_E$.

On en déduit : $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = \ldots = \vec{x}_k = \vec{x} = \vec{0}_{\mathrm{E}}$.

On a bien : $\left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{F}_i\right) \cap \mathrm{F}_{k+1} = \left\{\vec{0}_{\mathrm{E}}\right\}$.

Le résultat est établi.

$\boxed{\Leftarrow}$

On suppose ici que l'on a : $\forall k \in [\![1\,;n-1]\!], \left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{F}_i\right) \cap \mathrm{F}_{k+1} = \left\{\vec{0}_{\mathrm{E}}\right\}$.

Soit alors $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i \in \sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i$ avec .
Notre objectif est d'établir que cette décomposition est unique $\vec{x}_i \in \mathrm{F}_i$.

Supposons qu'il en existe une seconde : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \vec{y}_i \in \sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i$.

On a alors : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{y}_i$ et on en tire : $\sum_{i=1}^{n-1} \left(\vec{x}_i - \vec{y}_i\right) = \vec{y}_n - \vec{x}_n$.

Comme $\sum_{i=1}^{n-1} \left(\vec{x}_i - \vec{y}_i\right) \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{F}_i$ et $\vec{y}_n - \vec{x}_n \in \mathrm{F}_n$ et comme l'intersection de $\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{F}_i$ et F_n est, par hypothèse, réduite au vecteur nul, on en déduit : $\sum_{i=1}^{n-1} \left(\vec{x}_i - \vec{y}_i\right) = \vec{y}_n - \vec{x}_n = \vec{0}_{\mathrm{E}}$.

On a donc $\vec{y}_n = \vec{x}_n$, d'une part, et $\sum_{i=1}^{n-1} \left(\vec{x}_i - \vec{y}_i\right) = \vec{0}_{\mathrm{E}}$, d'autre part, soit : $\sum_{i=1}^{n-2} \left(\vec{x}_i - \vec{y}_i\right) = \vec{y}_{n-1} - \vec{x}_{n-1}$.
En poursuivant le raisonnement, en toute rigueur au moyen d'une récurrence finie (on montre que l'on a $\vec{y}_{n-p} = \vec{x}_{n-p}$ pour $p \in [\![0\,;n-1]\!]$), on montre successivement que l'on a $\vec{y}_{n-1} = \vec{x}_{n-1}$, $\vec{y}_{n-2} = \vec{x}_{n-2}$, …, $\vec{y}_3 = \vec{x}_3$ et enfin (à la dernière étape) : $\vec{y}_2 = \vec{x}_2$ et $\vec{y}_1 = \vec{x}_1$.

Ainsi, la décomposition de $\vec{x}$ dans $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i$ est unique.

Le résultat est établi.

> $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_n$ étant n sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, on a :
>
> $$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i \Leftrightarrow \forall k \in [\![1\,;n-1]\!], \left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{F}_i\right) \cap \mathrm{F}_{k+1} = \left\{\vec{0}_{\mathrm{E}}\right\}$$