

Déterminer les racines quatrièmes de -4 .

Analyse

L'exercice consiste en fait à résoudre l'équation : $z^4 + 4 = 0$. L'approche « classique » consiste à résoudre cette équation en posant : $z = re^{i\theta}$, r (module) et θ (argument) étant les deux inconnues à déterminer.

On peut cependant ici avoir recours aux polynômes en considérant le polynôme $P(X) = X^4 + 4$ et en menant sa factorisation sur \mathbb{C} puisque l'exercice revient en fait à en trouver les racines. Cette « méthode » est fournie à titre indicatif car, en général, elle n'est pas la plus simple à mettre en œuvre.

Résolution

1^{ère} approche : la méthode classique

Nous posons donc : $z = re^{i\theta}$ et considérons l'équation $z^4 + 4 = 0$.

Elle se réécrit : $(re^{i\theta})^4 + 4 = 0$, soit : $r^4 e^{4i\theta} = -4 = 4e^{i\pi}$. On en tire alors le système :

$$\begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

k étant un entier relatif.

Il vient :

$$\begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pour $k = 0, 1, 2$ et 3 , on obtient quatre valeurs de θ fournissant les quatre racines cherchées :

$$k = 0 : z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 1 + i$$

$$k = 1 : z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \right) = -1 + i$$

$$k = 2 : z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)} = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) \right) = -1 - i$$

$$k = 3 : z_3 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = 1 - i$$

Les racines quatrièmes de -4 sont donc : $1+i$, $-1+i$, $-1-i$ et $1-i$.

2^{ème} approche : factorisation du polynôme P

Soit donc le polynôme $P(X) = X^4 + 4$ dont on cherche la factorisation sur le corps des complexes.

$$\text{On a d'abord : } X^4 + 4 = (X^2 + 2)^2 - 4X^2 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2).$$

Soit donc les polynômes $P_1(X) = X^2 + 2X + 2$ et $P_2(X) = X^2 - 2X + 2$.

On en extrait facilement les racines en écrivant par exemple :

$$\begin{aligned} P_1(X) &= X^2 + 2X + 2 \\ &= (X + 1)^2 - 1 + 2 \\ &= (X + 1)^2 + 1 \\ &= (X + 1)^2 - i^2 \\ &= (X + 1 + i)(X + 1 - i) \end{aligned}$$

La factorisation de P_1 nous fournit deux racines : $-1-i$ et $-1+i$.

On factorise P_2 de façon analogue et on obtient : $P_2(X) = (X - 1 + i)(X - 1 - i)$. On en tire alors deux nouvelles racines : $1-i$ et $1+i$.

$$P(X) = (X + 1 + i)(X + 1 - i)(X - 1 + i)(X - 1 - i)$$

On a retrouvé les quatre racines obtenues précédemment.

Résultat final

Les quatre racines quatrièmes de -4 sont :
 $1+i$, $-1+i$, $-1-i$ et $1-i$