

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

Analyse

L'exercice ne pose pas de difficulté particulière. On peut, par exemple, commencer par résoudre une équation du second degré ...

Résolution

On a : $z^4 + 2z^2 + 4 = (z^2 + 1)^2 + 3 = (z^2 + 1)^2 - (i\sqrt{3})^2 = (z^2 + 1 + i\sqrt{3})(z^2 + 1 - i\sqrt{3})$.

D'où :

$$\begin{aligned} z^4 + 2z^2 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z^2 + 1 + i\sqrt{3})(z^2 + 1 - i\sqrt{3}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 1 + i\sqrt{3} = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 + 1 - i\sqrt{3} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nous sommes ainsi ramenés à la résolution de deux équations du deuxième degré.

Nous aurions obtenu le même résultat en introduisant la nouvelle variable : $Z = z^2$, l'équation se réécrivant alors : $Z^2 + 2Z + 4 = 0$ et fournissant les deux racines : $-1 - i\sqrt{3}$ et $-1 + i\sqrt{3}$.

Commençons donc par résoudre : $z^2 = -1 - i\sqrt{3}$

Cette équation revient à déterminer les deux racines carrées complexes de $-1 - i\sqrt{3}$.

On a :

$$\begin{aligned} z^2 &= -1 - i\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow z^2 &= 2 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \pi + 2k\pi\right)} \\ \Leftrightarrow z &= \sqrt{2}e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} + \pi + 2k\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k\pi\right)} \end{aligned}$$

Pour $k = 0$ et $k = 1$, on obtient les deux racines cherchées.

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
z_2 &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\pi\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Remarque : en réalité, un seul calcul suffit puisque l'on sait devoir trouver deux racines opposées ...

Réolvons maintenant : $z^2 = -1+i\sqrt{3}$.

Nous pouvons procéder de façon analogue à ce qui vient d'être fait (les calculs sont fournis ci-dessous). Pour autant, nous pouvons aussi directement faire référence à un résultat du cours sur les polynômes. Si nous considérons le polynôme $P(X) = X^4 + 2X^2 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$, nous savons qu'il admet quatre racines complexes conjuguées puisque ses coefficients sont réels. Ainsi, ayant obtenu z_1 et z_2 comme solutions de l'équation, c'est à dire comme racine de P ,

nous en déduisons que les deux autres sont : $\bar{z}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ et $\bar{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned}
z^2 &= -1+i\sqrt{3} \\
\Leftrightarrow z^2 &= 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)} \\
\Leftrightarrow z &= \sqrt{2}e^{i\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi-\pi}{2}+k\pi\right)}
\end{aligned}$$

Pour $k = 0$ et $k = 1$, on obtient les deux racines cherchées.

$$\begin{aligned}
 z_3 &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
 &= \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
 z_4 &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\pi\right)\right) \\
 &= \sqrt{2}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Résultat final

Les solutions de l'équation $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$ sont :

$$\begin{aligned}
 z_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\
 z_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\
 z_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \bar{z}_2 \\
 z_4 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \bar{z}_1
 \end{aligned}$$