

$$\text{Calculer : } a_n(\theta) = \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(k\theta) \text{ et } b_n(\theta) = \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(k\theta).$$

---

## Analyse

L'idée consiste ici à ne mener qu'un calcul après avoir fait apparaître une somme classique de complexes.

---

## Résolution

On considère :  $c_n(\theta) = a_n(\theta) + ib_n(\theta)$ .

On a :

$$\begin{aligned} c_n(\theta) &= a_n(\theta) + ib_n(\theta) \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(k\theta) \\ &= \sum_{k=0}^n \left( C_n^k (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left( C_n^k e^{ik\theta} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left( C_n^k (e^{i\theta})^k \right) \end{aligned}$$

En fait, on a utilisé ci-dessus la formule de MOIVRE :  $(\cos \theta + i \sin \theta)^k = \cos(k\theta) + i \sin(k\theta)$ .

En utilisant la formule du binôme, il vient alors :  $\sum_{k=0}^n \left( C_n^k (e^{i\theta})^k \right) = (1 + e^{i\theta})^n$ .

On a donc :  $c_n(\theta) = (1 + e^{i\theta})^n$ .

Comme :  $a_n(\theta) = \Re(c_n(\theta))$  et  $b_n(\theta) = \Im(c_n(\theta))$ , il nous reste donc désormais à déterminer les parties réelle et imaginaire de  $(1 + e^{i\theta})^n$ .

On a :

$$\begin{aligned}1 + e^{i\theta} &= 1 + \cos \theta + i \sin \theta \\&= 2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + 2i \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \\&= 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \left( \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right) \\&= 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i \frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}(1 + e^{i\theta})^n &= \left( 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i \frac{\theta}{2}} \right)^n \\&= 2^n \cos^n \left( \frac{\theta}{2} \right) e^{i \frac{n\theta}{2}} \\&= 2^n \cos^n \left( \frac{\theta}{2} \right) \left( \cos \left( \frac{n\theta}{2} \right) + i \sin \left( \frac{n\theta}{2} \right) \right)\end{aligned}$$

On en tire finalement :

$$\begin{aligned}a_n(\theta) &= \Re(c_n(\theta)) = 2^n \cos^n \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{n\theta}{2} \right) \\b_n(\theta) &= \Im(c_n(\theta)) = 2^n \cos^n \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{n\theta}{2} \right)\end{aligned}$$

---

## Résultat final

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(k\theta) &= 2^n \cos^n \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{n\theta}{2} \right) \\&\text{et} \\ \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(k\theta) &= 2^n \cos^n \left( \frac{\theta}{2} \right) \sin \left( \frac{n\theta}{2} \right)\end{aligned}$$