Simplifier : $\frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}+\frac{\alpha-i\beta}{\beta-i\alpha}$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

## Analyse

Plusieurs approches sont envisageables : on peut, par exemple, réduire les fractions au même dénominateur réel. Mais on peut également noter que cette somme est la somme de deux nombres complexes conjugués.

## Résolution

### *1ère approche : réduction au même dénominateur*

Le dénominateur commun est le produit : $(\beta+i\alpha)(\beta-i\alpha)=\beta^2+\alpha^2$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}+\frac{\alpha-i\beta}{\beta-i\alpha}&=\frac{(\alpha+i\beta)(\beta-i\alpha)}{\beta^2+\alpha^2}+\frac{(\alpha-i\beta)(\beta+i\alpha)}{\beta^2+\alpha^2}\\&=\frac{\left(2\alpha\beta+i\left(\beta^2-\alpha^2\right)\right)+\left(2\alpha\beta+i\left(\alpha^2-\beta^2\right)\right)}{\beta^2+\alpha^2}\\&=\frac{4\alpha\beta}{\beta^2+\alpha^2}\end{aligned}$$

La somme à simplifier est un réel.

### *2ème approche : somme de deux complexes conjugués*

On constate facilement que :

$$\overline{\left(\frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}\right)}=\frac{\overline{\alpha+i\beta}}{\overline{\beta+i\alpha}}=\frac{\alpha-i\beta}{\beta-i\alpha}$$

Le calcul se récrit alors, en tenant compte de : $z+\bar{z}=2\Re e(z)$ :

$$\frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}+\frac{\alpha-i\beta}{\beta-i\alpha}=\frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}+\overline{\left(\frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}\right)}=2\Re e\left(\frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}\right)$$

Il convient donc de déterminer la partie réelle de : $\dfrac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}$

On a :

$$\frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}=\frac{(\alpha+i\beta)(\beta-i\alpha)}{\beta^2+\alpha^2}=\frac{2\alpha\beta+i\left(\beta^2-\alpha^2\right)}{\beta^2+\alpha^2}$$

D'où :

$$\Re e\left(\frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}\right)=\frac{2\alpha\beta}{\beta^2+\alpha^2}$$

Et, finalement :

$$\frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}+\frac{\alpha-i\beta}{\beta-i\alpha}=2\Re e\left(\frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}\right)=\frac{4\alpha\beta}{\beta^2+\alpha^2}$$

On retrouve le résultat obtenu précédemment.

## Résultat final

$$\frac{\alpha+i\beta}{\beta+i\alpha}+\frac{\alpha-i\beta}{\beta-i\alpha}=\frac{4\alpha\beta}{\beta^2+\alpha^2}$$