Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3-3z^2+7z-5=0$ (E)

Analyse

Nous avons affaire à une équation du troisième degré à coefficient réels. Elle admet donc : soit trois solutions réelles ; soit une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées.

Résolution

On constate aisément que la somme des coefficients de (E) est nulle. On en tire donc immédiatement que $z_0=1$ est solution de (E).

On a alors :

$$\begin{aligned} z^3-3z^2+7z-5 &= (z-1)\left(z^2+az+b\right) \\ &= z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b \end{aligned}$$

En identifiant, il vient :

$$\begin{cases} a-1=-3 \\ b-a=7 \\ -b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases}$$

Il convient donc maintenant de résoudre : $z^2-2z+5=0$ (E').

Le discriminant vaut : $1-5=-4=(2i)^2$ et les solutions de (E') s'écrivent :

$$\begin{aligned} z_1 &= 1+2i \\ z_2 &= 1-2i \end{aligned}$$

Finalement, les solutions de (E) sont : $z_0=1$, $z_1=1+2i$ et $z_2=1-2i$.

Résultat final

Les solutions de l'équation $z^3-3z^2+7z-5=0$ sont : 1, $1+2i$ et $1-2i$.