Soit z un complexe et n un entier.
Calculer : $A_n(z)=z^n+\bar{z}^n$ et $B_n(z)=z^n-\bar{z}^n$
Appliquer à : $z=\sqrt{3}+i$

Analyse

L'exercice fait appel à plusieurs notions de base sur les nombres complexes. On utilise l'exponentielle complexe pour pouvoir démarrer les calculs.

Résolution

Soient ρ et θ, le module et l'argument, respectivement, du complexe z donné.

On a : $z=\rho e^{i\theta}$ et $\bar{z}=\rho e^{-i\theta}$.

D'où : $\forall n\in\mathbb{N}, z^n=\left(\rho e^{i\theta}\right)^n=\rho^n e^{ni\theta}$ et $\bar{z}^n=\left(\rho e^{-i\theta}\right)^n=\rho^n e^{-ni\theta}$.

Il vient alors :

$$A_n(z)=A_n(\rho,\theta)=\rho^n e^{ni\theta}+\rho^n e^{-ni\theta}=\rho^n\left(e^{ni\theta}+e^{-ni\theta}\right)=2\rho^n\cos(n\theta)$$

et, de façon analogue :

$$B_n(z)=B_n(\rho,\theta)=\rho^n e^{ni\theta}-\rho^n e^{-ni\theta}=\rho^n\left(e^{ni\theta}-e^{-ni\theta}\right)=2i\rho^n\sin(n\theta)$$

On a finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l}A_n=2\rho^n\cos(n\theta)\\ B_n=2i\rho^n\sin(n\theta)\end{array}}$$

Soit maintenant : $z=\sqrt{3}+i$. On a : $z=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

On va donc appliquer les résultats précédemment obtenus avec : $\rho=2$ et $\theta=\frac{\pi}{6}$.

On obtient :

$$A_n\left(2,\frac{\pi}{6}\right)=2^{n+1}\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) \text{ et } B_n\left(2,\frac{\pi}{6}\right)=2^{n+1}i\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$$

Dans un premier temps, calculons A_n.

On a clairement : $\forall n\in\mathbb{N}, \cos\left(\left(n+12\right)\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(n\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)$. La valeur de A_n dépend donc du reste de la division de *n* par 12.

Il y a douze cas de figure possibles. Mais on tient compte, pour s'affranchir de calculs répétitifs, des propriétés suivantes du cosinus :

$$\cos\left(x+\pi\right)=\cos\left(\pi-x\right)=-\cos x \text{ et } \cos\left(-x\right)=\cos x$$

On a alors :

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)}$	$\boldsymbol{A_n}$
$n\equiv 0\,\mathrm{mod}(12)$	$\cos\left(\left(12k\right)\pi\right)=1$	$A_n=2^{n+1}$
$n\equiv 1\,\mathrm{mod}(12)$	$\cos\left(\left(12k+1\right)\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$A_n=\sqrt{3}\times 2^n$
$n\equiv 2\,\mathrm{mod}(12)$	$\cos\left(\left(12k+2\right)\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$	$A_n=2^n$
$n\equiv 3\,\mathrm{mod}(12)$	$\cos\left(\left(12k+3\right)\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$	$A_n=0$
$n\equiv 4\,\mathrm{mod}(12)$	$\cos\left(\left(12k+4\right)\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$	$A_n=-2^n$
$n\equiv 5\,\mathrm{mod}(12)$	$\cos\left(\left(12k+5\right)\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$A_n=-\sqrt{3}\times 2^n$
$n\equiv 6\,\mathrm{mod}(12)$	$\cos\left(\left(12k+6\right)\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi\right)=-1$	$A_n=-2^{n+1}$
$n\equiv 7\,\mathrm{mod}(12)$	$\cos\left(\left(12k+7\right)\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$A_n=-\sqrt{3}\times 2^n$
$n\equiv 8\,\mathrm{mod}(12)$	$\cos\left(\left(12k+8\right)\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$	$A_n=-2^n$
$n\equiv 9\,\mathrm{mod}(12)$	$\cos\left(\left(12k+9\right)\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$	$A_n=0$
$n\equiv 10\,\mathrm{mod}(12)$	$\cos\left(\left(12k+10\right)\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(12\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$	$A_n=2^n$
$n\equiv 11\,\mathrm{mod}(12)$	$\cos\left(\left(12k+11\right)\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(12\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$A_n=\sqrt{3}\times 2^n$

En définitive, on peut synthétiser les résultats comme suit :

- Si $n=6k$, $A_n=(-1)^k 2^{n+1}$;
- Si $n=6k+1$, $A_n=(-1)^k \sqrt{3}\times 2^n$;
- Si $n=6k+2$, $A_n=(-1)^k 2^n$;
- Si $n=6k+3$, $A_n=0$;
- Si $n=6k+4$, $A_n=-(-1)^k 2^n$;
- Si $n=6k+5$, $A_n=-(-1)^k \sqrt{3}\times 2^n$.

En procédant de façon similaire, on obtient :

- Si $n=6k$, $B_n=0$;
- Si $n=6k+1$, $B_n=(-1)^k i2^n$;
- Si $n=6k+2$, $B_n=(-1)^k i\sqrt{3}\times 2^n$;
- Si $n=6k+3$, $B_n=(-1)^k i2^{n+1}$;
- Si $n=6k+4$, $B_n=(-1)^k i\sqrt{3}\times 2^n$;
- Si $n=6k+5$, $B_n=(-1)^k i2^n$.

Résultat final

Finalement, pour $z=\rho e^{i\theta}$, on a :

$$A_n=z^n+\bar{z}^n=2\rho^n\cos(n\theta)$$
$$B_n=z^n-\bar{z}^n=2i\rho^n\sin(n\theta)$$

et, pour $z=\sqrt{3}+i$:

- Si $n=6k$, $A_n=(-1)^k 2^{n+1}$ et $B_n=0$;
- Si $n=6k+1$, $A_n=(-1)^k \sqrt{3}\times 2^n$ et $B_n=(-1)^k i2^n$;
- Si $n=6k+2$, $A_n=(-1)^k 2^n$ et $B_n=(-1)^k i\sqrt{3}\times 2^n$;
- Si $n=6k+3$, $A_n=0$ et $B_n=(-1)^k i2^{n+1}$;
- Si $n=6k+4$, $A_n=-(-1)^k 2^n$ et $B_n=(-1)^k i\sqrt{3}\times 2^n$;
- Si $n=6k+5$, $A_n=-(-1)^k \sqrt{3}\times 2^n$ et $B_n=(-1)^k i2^n$.