Résoudre l'équation : $\left(z+3i\right)^3+\left(z+3i\right)^2+\left(z+3i\right)+1=0$ (E)

Analyse

On commence par se ramener à une équation plus simple en effectuant un changement de variable.

Résolution

En posant $Z=z+3i$, l'équation (E) se récrit :

$$Z^3+Z^2+Z+1=0 \quad \text{(E')}$$

-1 est racine évidente et on a :

$$\begin{aligned}
&Z^3+Z^2+Z+1=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(Z+1\right)\left(Z^2+1\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left(Z+1\right)\left(Z+i\right)\left(Z-i\right)=0
\end{aligned}$$

Les solutions de (E') sont donc : -1, i et $-i$.

Pour obtenir les solutions de (E), il suffit maintenant de revenir à la variable initiale :

$$\begin{gathered}
Z_0=-1 \Leftrightarrow z_0+3i=-1 \Leftrightarrow z_0=-1-3i\\
Z_1=i \Leftrightarrow z_1+3i=i \Leftrightarrow z_1=-2i\\
Z_2=-i \Leftrightarrow z_2+3i=-i \Leftrightarrow z_2=-4i
\end{gathered}$$

Résultat final

Les solutions de l'équation $\left(z+3i\right)^3+\left(z+3i\right)^2+\left(z+3i\right)+1=0$ sont :
$z_0=-1-3i$, $z_1=-2i$ et $z_2=-4i$.