Calculer : $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n$

Appliquer avec $n=15$.

Analyse

L'élévation à une puissance non spécifiée d'un complexe donné s'écrit immédiatement si l'on connaît son module et son argument. Ici, il convient de les déterminer dans un premier temps.

Résolution

Soit donc : $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.

Le module de z s'obtient rapidement :

$$|z| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right| = \frac{\left|1+i\sqrt{3}\right|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{1+3}}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Nous pouvons maintenant récrire z pour en faire apparaître la partie réelle et la partie imaginaire :

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}$$

Nous mettons alors $|z|$ en facteur pour obtenir z sous la forme : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{aligned}$$

Or, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

D’où :

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

et :

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

Il vient alors :

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

On en tire, finalement :

$$z^n=\left(2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{7n\pi}{12}}$$

Pour $n=15$, il vient alors :

$$\begin{aligned}z^{15}&=2^{\frac{15}{2}}e^{i\frac{105\pi}{12}}=2^{\frac{15}{2}}e^{i\frac{(96+9)\pi}{12}}=2^{\frac{15}{2}}e^{i\left(8\pi+\frac{3\pi}{4}\right)}\\&=2^{\frac{15}{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}=2^7\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\\&=128\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&=128(-1+i)\end{aligned}$$

Résultat final

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{7n\pi}{12}}$$

et, en particulier :

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{15}=128(-1+i)$$