Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+\cos\varphi z+\frac{1}{4}=0$ où $\varphi\in\mathbb{R}$.

Analyse

Il s'agit d'une équation du second degré que nous résolvons classiquement. On peut juste remarquer d'emblée que les coefficients sont réels et donc que les racines seront réelles ou complexes conjuguées.

Résolution

Le discriminant de l'équation s'écrit : $\Delta=\cos^2\varphi-1=-\sin^2\varphi\leq 0$.

Pour $\sin\varphi=0$, c'est à dire pour $\varphi\in\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$, l'équation admet une seule solution :

- Si k est pair, $\cos\varphi=1$ et on a : $z^2+\cos\varphi z+\frac{1}{4}=z^2+z+\frac{1}{4}=\left(z+\frac{1}{2}\right)^2$ d'où $z=-\frac{1}{2}$;
- Si k est impair, $\cos\varphi=-1$ et on a : $z^2+\cos\varphi z+\frac{1}{4}=z^2-z+\frac{1}{4}=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2$ d'où $z=\frac{1}{2}$.

Pour $\sin\varphi\neq 0$, c'est à dire pour $\varphi\notin\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$, l'équation admet deux racines complexes distinctes conjuguées :

$$z_1=\frac{-\cos\varphi-i\sin\varphi}{2}=-\frac{1}{2}e^{i\varphi}\ \text{ et }\ z_2=\frac{-\cos\varphi+i\sin\varphi}{2}=-\frac{1}{2}e^{-i\varphi}$$

On a donc : $z^2+\cos\varphi z+\frac{1}{4}=\left(z+\frac{1}{2}e^{i\varphi}\right)\left(z+\frac{1}{2}e^{-i\varphi}\right)$.

Résultat final

Les solutions de l'équation $z^2+\cos\varphi z+\frac{1}{4}=0$ sont :

Si $\varphi = k\pi$ $S=\left\{(-1)^{k+1}\frac{1}{2}\right\}$

Si $\varphi \neq k\pi$ $S=\left\{-\frac{1}{2}e^{i\varphi},-\frac{1}{2}e^{-i\varphi}\right\}$