Résoudre : $\cos x \cos(2x)\cos(3x) \geq \frac{1}{8}$ (E)

Généraliser.

Analyse

On dispose de formules simples permettant d'exprimer $\cos(2x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$. Pour autant, une telle approche conduit in fine à une inéquation du troisième degré délicate et ne présentant pas de racine simple.
Il est nettement préférable ici de revenir à la définition complexe de la fonction cosinus et de transformer ainsi le produit $\cos x \cos(2x)\cos(3x)$ en une somme.

Résolution

On part donc de : $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$, $\cos(2x) = \frac{1}{2}\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right)$ et $\cos(3x) = \frac{1}{2}\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right)$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
&\cos x \cos(2x)\cos(3x) \geq \frac{1}{8} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) \geq \frac{1}{8} \\
\Leftrightarrow\ & \left(e^{3ix} + e^{-ix} + e^{ix} + e^{-3ix}\right)\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) \geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & \left(e^{6ix} + 1 + e^{2ix} + e^{-4ix} + e^{4ix} + e^{-2ix} + 1 + e^{-6ix}\right) \geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & 2 + 2\cos(2x) + 2\cos(4x) + 2\cos(6x) \geq 1 \\
\Leftrightarrow\ & 1 + \cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x) \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Le terme de gauche a ainsi été transformé en une somme de cosinus dont les arguments suivent une progression arithmétique.

On peut d'ailleurs montrer que l'on a, plus généralement : $\prod_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$.

Pour a et h réels avec $h \neq 2k\pi$, on dispose de la formule générale suivante :

$$\cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \ldots + \cos(a+(n-1)h) = \frac{\cos\left(a + \frac{n-1}{2}h\right)\sin\left(\frac{n}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$$

En l'utilisant avec : $a=0$, $h=2x$ et $n=4$, on obtient :

$$1+\cos(2x)+\cos(4x)+\cos(6x)=\frac{\cos(3x)\sin(4x)}{\sin(x)} \quad (1)$$

On doit faire ici deux remarques :

1. D'une part, cette transformation de la somme n'est valable que pour $x \neq k\pi$ ($h \neq 2k\pi$). Pour $x = k\pi$, on a : $\cos x\cos(2x)\cos(3x)=(-1)^k(-1)^{2k}(-1)^{3k}=(-1)^{6k}=1$ et l'équation (E) est donc vérifiée.
   A partir de maintenant, on va donc chercher les solutions de (E) qui ne sont pas de la forme $x = k\pi$ et utiliser le résultat intermédiaire précédent.

2. Nous pouvions, à partir du produit $\cos x\cos(2x)\cos(3x)$ parvenir à l'égalité (1) sans avoir recours aux exponentielles complexes :
   Pour $x \neq k\pi$, on a, en effet :

$$\begin{aligned}\cos x\cos(2x)\cos(3x) &= \frac{(\sin x\cos x)\cos(2x)\cos(3x)}{\sin x}\\ &= \frac{\sin(2x)\cos(2x)\cos(3x)}{2\sin x}\\ &= \frac{\sin(4x)\cos(3x)}{4\sin x}\end{aligned}$$

   Le « défaut » de cette approche apparaît dans le cas plus général d'un produit quelconque de cosinus (voir plus loin).

Nous transformons L'égalité (1) en utilisant :

$$\begin{aligned}\cos(3x)\sin(4x) &= \frac{1}{2}\left(\sin((3+4)x)+\sin((4-3)x)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(7x)+\sin x\right)\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$1+\cos(2x)+\cos(4x)+\cos(6x)=\frac{1}{2}\frac{\sin(7x)+\sin x}{\sin x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 7x}{\sin x}+1\right)$$

L'inéquation (E) se récrit finalement :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 7x}{\sin x}+1\right)\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sin 7x}{\sin x}+1\geq 1\Leftrightarrow\frac{\sin 7x}{\sin x}\geq 0$$

Cette dernier inégalité peut être rendue équivalente à : $\sin(7x)\sin x \geq 0$ pour peu que nous réintégrions les valeurs de x de la forme $k\pi$. C'est ce que nous faisons.

Soit donc à résoudre : $\sin(7x)\sin x \geq 0$.

Si x est solution alors $x+2k\pi$ est également solution (périodicité du sinus). On peut donc se contenter de rechercher les solutions dans l'intervalle $[0,2\pi]$.

De façon analogue, si x est solution alors $\pi + x$ est également solution puisque
$\sin(7(x+\pi))\sin(x+\pi) = (\sin(7x+\pi))(\sin(x+\pi)) = (-\sin(7x))(-\sin x) = \sin(7x)\sin x$.
On peut donc encore restreindre l'intervalle de recherche en ne considérant que $[0,\pi]$.

Sur $[0,\pi]$, la fonction sinus prend des valeurs positives.

En revanche, on aura :

$$\begin{aligned}
&\sin(7x) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 2k\pi \leq 7x \leq 2k\pi + \pi \\
&\Leftrightarrow \frac{2k\pi}{7} \leq x \leq \frac{2k\pi}{7} + \frac{\pi}{7}
\end{aligned}$$

Les valeurs de k telles que $x \in [0,\pi]$ sont : 0, 1, 2 et 3 qui fournissent les intervalles suivants : $\left[0,\frac{\pi}{7}\right]$, $\left[\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7}\right]$, $\left[\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7}\right]$ et $\left[\frac{6\pi}{7},\pi\right]$.

Au regard des remarques faites précédemment, on en déduit que les intervalles solutions sont, pour $x \in [0,2\pi]$:

$$\left[0,\frac{\pi}{7}\right], \left[\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7}\right], \left[\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7}\right], \left[\frac{6\pi}{7},\frac{8\pi}{7}\right], \left[\frac{9\pi}{7},\frac{10\pi}{7}\right], \left[\frac{11\pi}{7},\frac{12\pi}{7}\right], \text{ et } \left[\frac{13\pi}{7},2\pi\right]$$

En translatant ensuite chacun de ces intervalles de $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et en notant que :

$$\left[-\frac{\pi}{7}+2k\pi,\frac{\pi}{7}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{6\pi}{7}+2k\pi,\frac{8\pi}{7}+2k\pi\right] = \left[-\frac{\pi}{7}+k\pi,\frac{\pi}{7}+k\pi\right]$$
$$\left[\frac{2\pi}{7}+2k\pi,\frac{3\pi}{7}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{9\pi}{7}+2k\pi,\frac{11\pi}{7}+2k\pi\right] = \left[\frac{2\pi}{7}+k\pi,\frac{3\pi}{7}+k\pi\right]$$
$$\left[\frac{4\pi}{7}+2k\pi,\frac{5\pi}{7}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{11\pi}{7}+2k\pi,\frac{12\pi}{7}+2k\pi\right] = \left[\frac{4\pi}{7}+k\pi,\frac{5\pi}{7}+k\pi\right]$$

on obtient finalement :

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{7}+k\pi,\frac{\pi}{7}+k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{7}+k\pi,\frac{3\pi}{7}+k\pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{7}+k\pi,\frac{5\pi}{7}+k\pi\right] \right)$$

Compléments

Nous reprenons l'inégalité initiale : $\cos x \cos(2x)\cos(3x) \geq \frac{1}{8}$.

Cette fois, nous allons exprimer les cosinus multiples en fonction de $\cos x$:

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \text{ et } \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos x = \cos x\left(4\cos^2(x) - 3\right)$$

En posant alors $t = \cos^2(x)$, l'inégalité se récrit :

$$\begin{aligned}
&\cos x \cos(2x)\cos(3x) \geq \frac{1}{8} \\
&\Leftrightarrow \cos x\left(2\cos^2(x) - 1\right)\cos x\left(4\cos^2(x) - 3\right) \geq \frac{1}{8} \\
&\Leftrightarrow t(2t-1)(4t-3) \geq \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Considérons alors le polynôme factorisé : $P(X) = X(2X-1)(4X-3)$ et la fonction polynôme associée : $P(x) = x(2x-1)(4x-3)$.

Comme $t = \cos^2(x)$, seules ses variations sur $[0,1]$ sont à prendre en compte.

Les trois valeurs annulant *P* (0, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$) appartiennent à cet intervalle et on trouve aisément que la dérivée *P'* s'annule pour : $x_1 = \frac{5-\sqrt{7}}{12} \simeq 0{,}196$ et $x_2 = \frac{5+\sqrt{7}}{12} \simeq 0{,}637$.

Sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a $P(x) \geq 0$ et le maximum est obtenu pour x_1.

On trouve alors : $P(x_1) = \frac{2+3\sqrt{7}}{18} \simeq 0{,}552 > \frac{1}{8} = 0{,}125$.

On en tire alors : $\exists (t_1, t_2) \in \left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right)^2, t_1 < t_2 \,/\, \forall x \in [t_1, t_2], P(x) \geq \frac{1}{8}$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, on a $P(x) \leq 0$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$, on a $P(x) \geq 0$ et la fonction polynôme *P* y est strictement croissante.

Or $P\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ et $P(1) = 1$. Donc : $\exists t_3 \in \left]\frac{3}{4}, 1\right[\,/\, \forall x \in]t_3, 1[, P(x) \geq \frac{1}{8}$.

Nous allons voir comment les intervalles obtenu précédemment vont nous permettre de déterminer facilement les trois réels t_1, t_2 et t_3.

On considère donc les intervalles : $\left[-\frac{\pi}{7},\frac{\pi}{7}\right]$, $\left[\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7}\right]$ et $\left[\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7}\right]$ (ils suffisent du fait de la parité du cosinus).

Pour $x\in\left[-\frac{\pi}{7},\frac{\pi}{7}\right]$, on a $0<\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\leq\cos x\leq 1$ et donc : $\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\leq\cos^2(x)\leq 1$.

Pour $x\in\left[\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7}\right]$, on a $0<\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\leq\cos x\leq\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)<1$ et donc :
$\cos^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)\leq\cos^2(x)\leq\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

Pour $x\in\left[\frac{4\pi}{7},\frac{5\pi}{7}\right]$, on a $-1<\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)\leq\cos x\leq\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)<0$ et donc :
$\cos^2\left(\frac{4\pi}{7}\right)\leq\cos^2(x)\leq\cos^2\left(\frac{5\pi}{7}\right)$. Mais en tenant compte de $\cos(\pi-x)=-\cos x$, la dernière inégalité se récrit : $\cos^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)\leq\cos^2(x)\leq\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. Elle est donc identique à celle, obtenue pour l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{7}\right]$.

En d'autres termes, nous disposons des deux inégalités :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\leq t\leq 1 \text{ et } \cos^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)\leq t\leq\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

Elles nous fournissent directement les valeurs cherchées de t_1, t_2 et t_3 :

$$t_1=\cos^2\left(\frac{3\pi}{7}\right),\ t_2=\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) \text{ et } t_3=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

A titre indicatif, nous en fournissons les valeurs numériques approchées :

$$t_1=\cos^2\left(\frac{3\pi}{7}\right)\simeq 0,05,\ t_2=\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right)\simeq 0,389 \text{ et } t_3=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)\simeq 0,812$$

Généralisation

On part cette fois de l'équation suivante :

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(kx) \geq \frac{1}{2^n} \text{ (E)}$$

En procédant comme ci-dessus, on la récrit comme suit :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) \geq \frac{1}{2}$$

On utilise alors, pour $x \neq k\pi$, l'égalité ci-dessous avec $a = 0$ et $h = 2x$:

$$\cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + ... + \cos(a+(n-1)h) = \frac{\cos\left(a + \frac{n-1}{2}h\right)\sin\left(\frac{n}{2}h\right)}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) &= \frac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin x} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin((2n+1)x) + \sin x}{\sin x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} + 1\right)\end{aligned}$$

L'équation à résoudre se récrit alors : $\dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} \geq 0$.

Soit, finalement, en réintégrant les valeurs de x de la forme $k\pi$:

$$\sin((2n+1)x)\sin x \geq 0$$

Du fait du facteur impair de x dans le premier sinus, la discussion est identique à ce qui a été fait plus haut et on a finalement :

$$\begin{aligned}S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Bigg(&\left[-\frac{\pi}{2n+1} + k\pi, \frac{\pi}{2n+1} + k\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{2n+1} + k\pi, \frac{3\pi}{2n+1} + k\pi\right] \cup ... \\ &... \cup \left[\frac{2(n-1)\pi}{2n+1} + k\pi, \frac{2n-1\pi}{2n+1} + k\pi\right]\Bigg)\end{aligned}$$

Résultat final

L'ensemble des solutions de l'équation

$$\cos x \cos(2x)\cos(3x) \geq \frac{1}{8}$$

est l'ensemble :

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{7}+k\pi, \frac{\pi}{7}+k\pi \right] \cup \left[\frac{2\pi}{7}+k\pi, \frac{3\pi}{7}+k\pi \right] \cup \left[\frac{4\pi}{7}+k\pi, \frac{5\pi}{7}+k\pi \right] \right)$$

Plus généralement, l'ensemble des solutions de l'équation

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(kx) \geq \frac{1}{2^n}$$

est l'ensemble

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{2n+1}+k\pi, \frac{\pi}{2n+1}+k\pi \right] \cup \left[\frac{2\pi}{2n+1}+k\pi, \frac{3\pi}{2n+1}+k\pi \right] \cup \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \cup \left[\frac{2(n-1)\pi}{2n+1}+k\pi, \frac{2n-1\pi}{2n+1}+k\pi \right] \right)$$