

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \alpha \neq 0$.
Calculer les sommes :

$$U = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(k\alpha)}{\cos^k(\alpha)} \text{ et } V = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k\alpha)}{\cos^k(\alpha)}$$

Analyse

Dans un premier temps, il convient de traduire l'hypothèse $\cos \alpha \neq 0$. La deuxième somme requiert une discussion. On effectue ensuite les deux calculs simultanément en introduisant la somme complexe : $W = U + iV$.

Résolution

On a : $\cos \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + p\pi \Leftrightarrow |\sin \alpha| \neq -1$.

On note, par ailleurs, que si $\alpha = p\pi$ avec p entier relatif, on a : $\sin(k\alpha) = 0$ pour toute valeur de l'entier k . Dans ce cas particulier, on a : $V = 0$.

Que vaut alors U ?

Pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a :

$$\cos(k\alpha) = \cos(kp\pi) = (-1)^{kp}$$

et

$$\cos^k(\alpha) = \cos^k(p\pi) = \left((-1)^p\right)^k = (-1)^{pk}$$

Soit : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \frac{\cos(k\alpha)}{\cos^k(\alpha)} = 1$.

Et finalement : $U = n + 1$.

Pour $\alpha = p\pi$, on a :
 $U = n + 1$ et $V = 0$

Pour les calculs qui suivent, on va donc supposer : $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + p\pi$ et $\alpha \neq p\pi$, soit, en définitive : $\alpha \neq p\frac{\pi}{2}$.

Soit donc :

$$\begin{aligned}
 W &= U + iV \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{\cos(k\alpha)}{\cos^k(\alpha)} + i \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k\alpha)}{\cos^k(\alpha)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{\cos(k\alpha) + i \sin(k\alpha)}{\cos^k(\alpha)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{e^{ik\alpha}}{\cos^k(\alpha)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{i\alpha}}{\cos \alpha} \right)^k
 \end{aligned}$$

On est ainsi ramené au calcul de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique complexe de raison : $\frac{e^{i\alpha}}{\cos \alpha} = 1 + i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. On note que pour $\alpha = p\pi$, la raison est un réel (elle vaut 1 et on retrouve immédiatement les valeurs particulières de U et V obtenues dans ce cas).

Une telle sommation est connue et on obtient :

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1 - \left(\frac{e^{i\alpha}}{\cos \alpha} \right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{i\alpha}}{\cos \alpha}} \\
 &= \frac{1 - \frac{\cos((n+1)\alpha) + i \sin((n+1)\alpha)}{\cos^{n+1}(\alpha)}}{1 - \left(1 + i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)} \\
 &= -\frac{1 \cos \alpha}{i \sin \alpha} \frac{1}{\cos^{n+1}(\alpha)} \left((\cos^{n+1}(\alpha) - \cos((n+1)\alpha)) - i \sin((n+1)\alpha) \right) \\
 &= \frac{i}{\sin \alpha \cos^n(\alpha)} \left((\cos^{n+1}(\alpha) - \cos((n+1)\alpha)) - i \sin((n+1)\alpha) \right) \\
 &= \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha \cos^n(\alpha)} + i \frac{\cos^{n+1}(\alpha) - \cos((n+1)\alpha)}{\sin \alpha \cos^n(\alpha)}
 \end{aligned}$$

Il vient donc, finalement, pour $\alpha \neq p\frac{\pi}{2}$:

$$U = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha \cos^n(\alpha)} \text{ et } V = \frac{\cos^{n+1}(\alpha) - \cos((n+1)\alpha)}{\sin \alpha \cos^n(\alpha)}$$

Résultat final

Si $\alpha = p\pi$: $U = n+1$ et $V = 0$

$$\text{Si } \alpha \neq p\frac{\pi}{2} : U = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha \cos^n(\alpha)} \text{ et } V = \frac{\cos^{n+1}(\alpha) - \cos((n+1)\alpha)}{\sin \alpha \cos^n(\alpha)}$$