Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Calculer les sommes :

$$U=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\cos(\alpha+k\beta) \text{ et } V=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\sin(\alpha+k\beta)$$

Analyse

Les calculs ne posent pas de difficulté particulière. On calcule les deux sommes simultanément en introduisant la somme complexe : $W=U+iV$.

Résolution

Soit donc :

$$\begin{aligned}W&=U+iV\\&=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\cos(\alpha+k\beta)+i\sum_{k=0}^{n} C_n^k\sin(\alpha+k\beta)\\&=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\cos(\alpha+k\beta)+i\sin(\alpha+k\beta)\right)\\&=\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i(\alpha+k\beta)}\\&=e^{i\alpha}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ik\beta}\\&=e^{i\alpha}\left(1+e^{i\beta}\right)^n\end{aligned}$$

On récrit le terme élevé à la puissance n comme suit avec l'objectif de se débarrasser de la somme :

$$\begin{aligned}1+e^{i\beta}&=1+\cos\beta+i\sin\beta\\&=2\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+2i\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\\&=2\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)\\&=2\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\frac{\beta}{2}}\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
W &= e^{i\alpha}\left(2\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\frac{\beta}{2}}\right)^n \\
&= e^{i\alpha}2^n\cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{ni\frac{\beta}{2}} \\
&= 2^n\cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\left(\alpha+n\frac{\beta}{2}\right)} \\
&= 2^n\cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\left(\alpha+n\frac{\beta}{2}\right)+i\sin\left(\alpha+n\frac{\beta}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

On en tire finalement :

$$
\begin{aligned}
U &= 2^n\cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\alpha+n\frac{\beta}{2}\right) \\
V &= 2^n\cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha+n\frac{\beta}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Résultat final

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos(\alpha+k\beta) &= 2^n\cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\alpha+n\frac{\beta}{2}\right) \\
\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin(\alpha+k\beta) &= 2^n\cos^n\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha+n\frac{\beta}{2}\right)
\end{aligned}
$$