Soit $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}^*)^2$. On pose $A=\left(\dfrac{z+\alpha}{iz+\beta}\right)^2$.

Déterminer α et β pour que A soit un réel.

Analyse

On introduit le conjugué $\overline{A}$ de A pour exprimer la condition « A réel ». La discussion qui en découle permet d'amorcer les calculs.

Résolution

Remarque préalable : pour $z=i\beta$, le dénominateur de la fraction argument de la puissance s'annule. Cette valeur de z n'est donc pas solution de notre problème. On cherche donc z dans $\mathbb{C}-\{i\beta\}$.

On a : A réel si, et seulement si : $A=\overline{A}$.

En utilisant les propriétés de la conjugaison d'un produit de complexes, il vient :

$$\overline{A}=\overline{\left(\frac{z+\alpha}{iz+\beta}\right)^2}=\left(\overline{\left(\frac{z+\alpha}{iz+\beta}\right)}\right)^2=\left(\frac{\overline{z+\alpha}}{\overline{iz+\beta}}\right)^2=\left(\frac{\overline{z}+\alpha}{-i\overline{z}+\beta}\right)^2$$

La condition se récrit alors :

$$\begin{aligned}
A=\overline{A}&\Leftrightarrow\left(\frac{z+\alpha}{iz+\beta}\right)^2=\left(\frac{\overline{z}+\alpha}{-i\overline{z}+\beta}\right)^2\\
&\Leftrightarrow\left(\frac{z+\alpha}{iz+\beta}-\frac{\overline{z}+\alpha}{-i\overline{z}+\beta}\right)\left(\frac{z+\alpha}{iz+\beta}+\frac{\overline{z}+\alpha}{-i\overline{z}+\beta}\right)=0\\
&\Leftrightarrow\left(\frac{z+\alpha}{iz+\beta}-\frac{\overline{z}+\alpha}{-i\overline{z}+\beta}=0\right)\vee\left(\frac{z+\alpha}{iz+\beta}+\frac{\overline{z}+\alpha}{-i\overline{z}+\beta}=0\right)
\end{aligned}$$

Ces deux possibilités traduisent simplement le fait que le carré d'un complexe donné est un réel si, et seulement si, ce complexe est un réel ou un imaginaire pur.

Nous devons donc résoudre deux équations.

→ $\dfrac{z+\alpha}{iz+\beta}-\dfrac{\overline{z}+\alpha}{-i\overline{z}+\beta}=0$

Pour $z \in \mathbb{C} - \{i\beta\}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{z+\alpha}{iz+\beta} - \frac{\overline{z}+\alpha}{-i\overline{z}+\beta} = 0 \Leftrightarrow (z+\alpha)(-i\overline{z}+\beta) = (\overline{z}+\alpha)(iz+\beta) \\
&\Leftrightarrow -iz\overline{z} + \beta z - i\alpha\overline{z} + \alpha\beta = iz\overline{z} + \beta\overline{z} + i\alpha z + \alpha\beta \\
&\Leftrightarrow 2iz\overline{z} + i\alpha(z+\overline{z}) - \beta(z-\overline{z}) = 0
\end{aligned}$$

En posant : $z = x + iy$, il vient :

$$\begin{aligned}
&2iz\overline{z} + i\alpha(z+\overline{z}) - \beta(z-\overline{z}) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2i\left(x^2+y^2\right) + 2i\alpha x - 2i\beta y = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x - \beta y = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} + \left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

La relation obtenue correspond à l'équation d'un cercle C de centre $\Omega\left(-\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ et de rayon $\rho = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$. Mais on vérifie aisément que le point B d'affixe $z = i\beta$ appartient à ce cercle.
De fait, toutes les affixes des points du cercle C sauf celle de B sont solutions de notre problème.

→ $\frac{z+\alpha}{iz+\beta} + \frac{\overline{z}+\alpha}{-i\overline{z}+\beta} = 0$

Pour $z \in \mathbb{C} - \{i\beta\}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{z+\alpha}{iz+\beta} + \frac{\overline{z}+\alpha}{-i\overline{z}+\beta} = 0 \Leftrightarrow (z+\alpha)(-i\overline{z}+\beta) = -(\overline{z}+\alpha)(iz+\beta) \\
&\Leftrightarrow -iz\overline{z} + \beta z - i\alpha\overline{z} + \alpha\beta = -iz\overline{z} - \beta\overline{z} - i\alpha z - \alpha\beta \\
&\Leftrightarrow \beta(z+\overline{z}) + i\alpha(z-\overline{z}) + 2\alpha\beta = 0
\end{aligned}$$

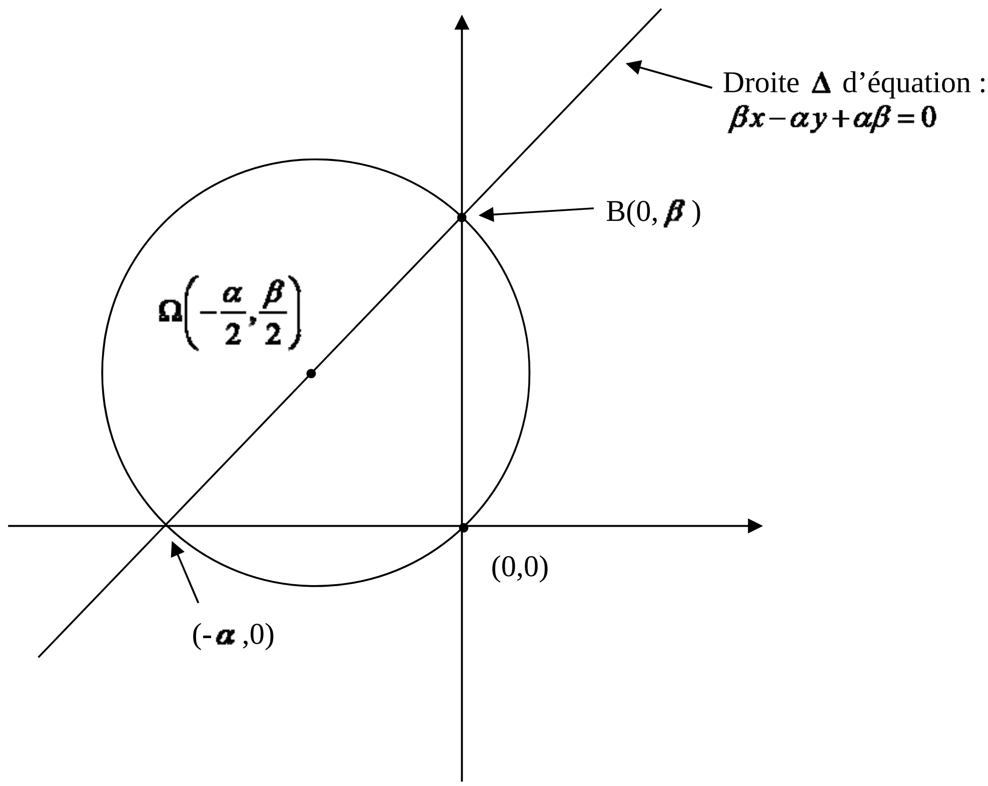
En posant, comme précédemment : $z = x + iy$, il vient :

$$\begin{aligned}
&\beta(z+\overline{z}) + i\alpha(z-\overline{z}) + 2\alpha\beta = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\beta x - 2\alpha y + 2\alpha\beta = 0 \\
&\Leftrightarrow \beta x - \alpha y + \alpha\beta = 0
\end{aligned}$$

On obtient cette fois l'équation d'une droite. On remarque :

1. qu'elle passe par le point *B*. On ne doit donc retenir que les affixes des points appartenant aux deux demi-droites issues de *B*.
2. qu'il existe un point, de coordonnées $(-\alpha, 0)$ appartenant à la droite et au cercle « solutions ». Le complexe correspondant, $z = -\alpha$, annule le rapport $\frac{z+\alpha}{iz+\beta}$, seule possibilité pour qu'il soit à la fois égal à son conjugué et à l'opposé de son conjugué !

On peut représenter géométriquement le cercle et la droite obtenus :



Résultat final

$A = \left(\frac{z+\alpha}{iz+\beta}\right)^2$ est un réel pour $z = x+iy$ différent de $i\beta$ et vérifiant :

$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}\right)^2 \text{ ou } \beta x - \alpha y + \alpha\beta = 0$$