

Résoudre dans \mathbb{C}^* l'équation :

$$\bar{z}^3 + z = 0 \quad (\text{E})$$

On commencera par montrer que $|z|=1$.

Analyse

En montrant que les solutions non nulles de (E) vérifient $|z|=1$, on peut chercher les solutions de (E) sous la forme d'exponentielles complexes qui se manipulent aisément.

On remarque que $z=0$ est solution évidente de (E) dans \mathbb{C} . L'objectif de cet exercice est donc de déterminer les autres solutions de (E) ...

Résolution

Soit z un complexe non nul solution de (E).

L'équation de (E) est équivalente à $\bar{z}^3 = -z$, soit, en considérant les modules :

$$|\bar{z}^3| = |-z|$$

Or on a : $|\bar{z}^3| = |\bar{z}|^3 = |z|^3$ et $|-z| = |z|$.

On a donc, en utilisant les propriétés du module :

$$|\bar{z}^3| = |-z| \Leftrightarrow |z|^3 = |z| \Leftrightarrow |z|(|z|^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow |z|(|z| - 1)(|z| + 1) = 0$$

Comme nous recherchons $z \neq 0$ et que le module est une grandeur positive, la dernière égalité est équivalente à :

$$|z| - 1 = 0$$

Ayant établi que le module des éventuelles solutions non nulles de (E) était égal à 1, nous pouvons poser : $z = e^{i\theta}$, l'argument θ devenant la nouvelle inconnue.

On a alors : $\bar{z}^3 = (e^{-i\theta})^3 = e^{-3i\theta}$ et $-z = e^{i\pi} e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$.

En écrivant :

$$\bar{z}^3 = -z \Leftrightarrow \frac{-z}{\bar{z}^3} = 1$$

on obtient :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{-z}{\bar{z}^3} = 1 \Leftrightarrow \frac{e^{i(\theta+\pi)}}{e^{-3i\theta}} = 1 \Leftrightarrow e^{i(4\theta+\pi)} = e^{2k\pi}$$

où $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{On en tire : } 4\theta + \pi = 2k\pi \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$$

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, on obtient les quatre solutions distinctes suivantes :

- $k = 0 \rightarrow z_0 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i).$
- $k = 1 \rightarrow z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$
- $k = 2 \rightarrow z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right)} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i).$
- $k = 3 \rightarrow z_3 = e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i).$

Résultat final

Les solutions non nulles de l'équation $\bar{z}^3 + z = 0$ sont :

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$$