Déterminer et représenter l'ensemble des points du plan complexe vérifiant l'équation :

$$\left|\overline{z}-3-i\right|=\left|iz+1+2i\right| \quad \text{(E)}$$

Analyse

L'exercice ne présente pas de difficulté particulière et se résout rapidement à condition de ne pas utiliser la moindre forme algébrique !
Mieux vaut utiliser quelques-unes des propriétés du module …

Résolution

Pour ce qui est du membre de gauche, on utilise la propriété : $\left|\overline{z}\right|=\left|z\right|$ (égalité des modules d'un complexe et de son conjugué).

Il vient donc :

$$\left|\overline{z}-3-i\right|=\left|\overline{\overline{z}-3-i}\right|=\left|\overline{\overline{z}}+\overline{\left(-3-i\right)}\right|=\left|z+\left(-3+i\right)\right|=\left|z-\left(3-i\right)\right|$$

Ainsi transformé, ce module s'interprète géométriquement comme la distance du point M d'affixe z au point A d'affixe $3-i$.

Pour ce qui est du membre de droite, on utilise la propriété : $\left|zz'\right|=\left|z\right|\left|z'\right|$.

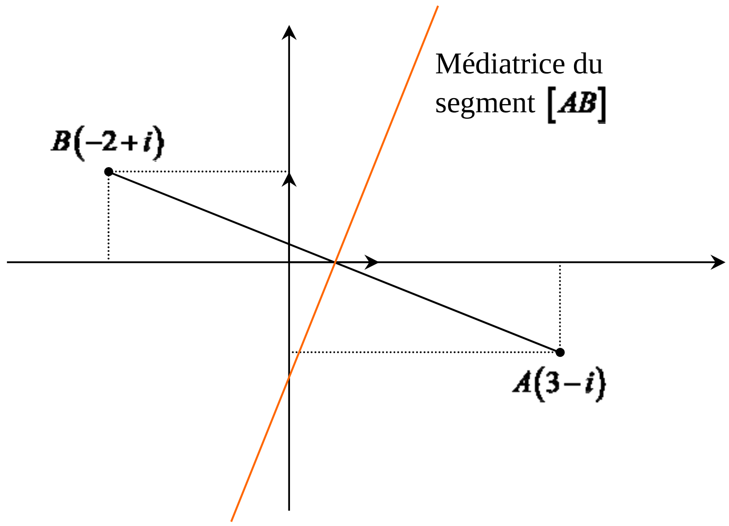
On a : $iz+1+2i=i\left(z+\dfrac{1+2i}{i}\right)=i\left(z+2-i\right)$, d'où :

$$\left|iz+1+2i\right|=\left|i\left(z+2-i\right)\right|=\left|i\right|\left|z+2-i\right|=\left|z+2-i\right|=\left|z-\left(-2+i\right)\right|$$

La dernière égalité résulte du fait que $\left|i\right|=1$.

Le module correspondant au membre de droite de l'équation ainsi transformé s'interprète géométriquement comme la distance du point M d'affixe z au point B d'affixe $-2+i$.

→ L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe vérifie l'équation (E) est donc l'ensemble des points situés à égales distances des points $A\left(3-i\right)$ et $B\left(-2+i\right)$. Il s'agit donc de la médiatrice du segment $\left[AB\right]$ (voir figure ci-après).



Résultat final

L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe vérifie l'équation $|\bar{z}-3-i|=|iz+1+2i|$ est la médiatrice du segment $[AB]$ où $A(3-i)$ et $B(-2+i)$.