

Résoudre l'équation : $z^2 - 4z + 13 = 0$.

Analyse

L'exercice ne pose pas de difficulté particulière. On peut ou non utiliser la notion de discriminant ...

Résolution

1^{ère} méthode : mise sous forme canonique

On identifie dans $z^2 - 4z$ le début du carré de $z - 2$. On a donc :

$$z^2 - 4z + 13 = (z - 2)^2 - 4 + 13 = (z - 2)^2 + 9.$$

En écrivant alors : $9 = -(3i)^2$, on obtient une différence de deux carrés :

$$z^2 - 4z + 13 = (z - 2)^2 + 9 = (z - 2)^2 - (3i)^2 = (z - 2 - 3i)(z - 2 + 3i)$$

On en tire les deux racines complexes conjuguées de l'équation :

$$z_1 = 2 + 3i$$

$$z_2 = 2 - 3i$$

2^{ème} méthode : utiliser le discriminant

Le coefficient de z étant pair, on peut calculer le discriminant réduit associé à l'équation :

$$\Delta' = (-2)^2 - 13 = 4 - 13 = -9 = (3i)^2$$

On en tire alors immédiatement les deux racines complexes conjuguées obtenues précédemment.

Résultat final

Les solutions de l'équation $z^2 - 4z + 13 = 0$ sont :

$$z_1 = 2 + 3i \text{ et } z_2 = 2 - 3i$$