Déterminer et représenter l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes vérifient l'équation :

$$|z-i| = |z+i| \qquad \text{(E)}$$

Analyse

L'exercice ne présente pas de difficulté particulière. Nous proposons ici deux approches : une approche géométrique (les modules sont identifiés à des distances dans le plan complexe) et une approche algébrique.

Résolution

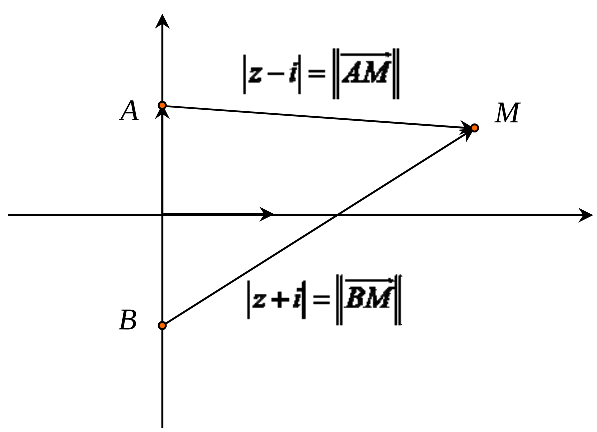
1ère approche : approche géométrique

On considère, dans le plan complexe, le point A d'affixe i et le point B d'affixe $-i$.
Soit alors M le point d'affixe z.

Le complexe $z-i$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$ et on a : $|z-i| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\|$.

Le complexe $z+i$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$ et on a : $|z+i| = \left\|\overrightarrow{BM}\right\|$.

(Voir la figure ci-dessous)



L'équation (E) se récrit alors : $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| = \left\|\overrightarrow{BM}\right\|$. En d'autres termes, on recherche l'ensemble des points situés à égale distance des points A et B. Il s'agit donc de la médiatrice du segment $[AB]$.

Ces deux points étant symétriques par rapport à l'axe des abscisses, l'ensemble cherché est cet axe !

2ème approche : approche analytique

Ici, on pose $z = x + iy$.

Un module étant une grandeur positive, il vient :

$$\begin{aligned}
& |z-i| = |z+i| \\
& \Leftrightarrow |z-i|^2 = |z+i|^2 \\
& \Leftrightarrow |x+iy-i|^2 = |x+iy+i|^2 \\
& \Leftrightarrow |x+i(y-1)|^2 = |x+i(y+1)|^2 \\
& \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = x^2+(y+1)^2 \\
& \Leftrightarrow y^2-2y+1 = y^2+2y+1 \\
& \Leftrightarrow -2y = 2y \\
& \Leftrightarrow y = 0
\end{aligned}$$

On retrouve l'équation de l'axe des abscisses.

Résultat final

L'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe vérifie l'équation $|z-i| = |z+i|$ est l'axe des abscisses (équation $y = 0$).