

Résoudre :

$$z^2 = \bar{z} \quad (\text{E})$$

---

## Analyse

L'exercice peut être traité de diverses façons. Nous proposons ici deux approches : une approche algébrique et une approche utilisant l'exponentielle complexe. En guise de préambule, on a tout intérêt à souligner et exploiter une certaine symétrie de l'équation.

---

## Résolution

### *Préambule*

En supposant que  $z$  est solution de (E), on a :

$$\bar{z}^2 = \overline{z^2} = \overline{\bar{z}} \Leftrightarrow \bar{z} \text{ solution de (E)}.$$

En d'autres termes, si  $z$  est solution de (E) alors  $\bar{z}$  est également solution de (E).

Ce résultat nous permet de valider (partiellement) les solutions obtenues.

### *1<sup>ère</sup> approche : approche algébrique*

On pose :  $z = x + iy$ .

On a alors :  $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$  et  $\bar{z} = x - iy$ .

Il vient alors :

$$(\text{E}) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = x - iy \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = y^2 \\ y(2x+1) = 0 \end{cases}$$

La seconde égalité nous conduit à distinguer deux cas de figure.

1<sup>er</sup> cas :  $y \neq 0$

La deuxième égalité du système nous donne :  $2x = -1$ , soit :  $x = -\frac{1}{2}$ .

La première égalité nous donne alors :

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right) = y^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On obtient ainsi les deux solutions suivantes :

$$z_0 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$
$$z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

On note que ces deux solutions sont conjuguées.

**2<sup>ème</sup> cas :  $y = 0$**

Dans ce cas, la première égalité du système donne :

$$x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

On obtient ainsi les deux solutions réelles (chacune étant égale à sa conjuguée) :

$$z_2 = 0$$
$$z_3 = 1$$

Finalement, l'ensemble  $S$  des solutions de (E) s'écrit :

$$S = \left\{ 0, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

**2<sup>ème</sup> approche : utilisation de l'exponentielle complexe**

On pose ici :  $z = re^{i\theta}$  avec  $r = |z| \geq 0$ .

On a alors :  $z^2 = (re^{i\theta})^2 = r^2e^{2i\theta}$  et  $\bar{z} = re^{-i\theta}$ .

L'équation (E) se réécrit alors :

$$z^2 = \bar{z} \Leftrightarrow r^2e^{2i\theta} = re^{-i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = r \\ 2\theta = -\theta \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(r-1) = 0 \\ 3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(r-1) = 0 \\ \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La première égalité nous conduit à distinguer deux cas.

1<sup>er</sup> cas :  $r = 0$

On obtient la solution :  $z_0 = 0$ .

2<sup>ème</sup> cas :  $r = 1$

Dans ce cas, la deuxième égalité du système,  $\theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ , nous fournit trois solutions distinctes :

- $k = 0$  donne  $\theta = 0$ , soit :  $z_1 = e^0 = 1$ .
- $k = 1$  donne  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ , soit :  $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- $k = 2$  donne  $\theta = \frac{4\pi}{3}$ , soit :  $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

On retrouve ainsi l'ensemble des solutions précédemment obtenues.

On note que les trois solutions  $z_1, z_2$  et  $z_3$  correspondent aux racines troisièmes de l'unité. Ceci provient du fait que :  $z^2 = \bar{z} \Rightarrow zz^2 = z^3 = z\bar{z} = |z|^2$ . Pour  $|z| = 1$ , cette dernière équation consiste à trouver les racines troisièmes de 1.

---

## Résultat final

L'ensemble des solutions de l'équation  $z^2 = \bar{z}$  est :

$$S = \left\{ 0, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$