Donner la forme algébrique des complexes suivants :

$$z_1 = (3-i)(5+2i) \qquad z_2 = -i(18-2i)$$

$$z_3 = (4+i)(-2+i)(1-3i) \qquad z_4 = (4-3i)^2$$

$$z_5 = \left(5+\sqrt{2}i\right)^2 \qquad z_6 = \left(1-\sqrt{3}i\right)^3$$

$$z_7 = (-1-2i)^4 \qquad z_8 = \frac{1-3i}{2+i}$$

$$z_9 = \frac{1+i}{2-i} \qquad z_{10} = \frac{5i(3-i)}{4+i}$$

$$z_{11} = \frac{6-5i}{1+i} + \frac{-2+7i}{-1+i} \qquad z_{12} = \frac{5+i}{2i} + \frac{2+3i}{1-i}$$

Analyse

L'exercice fait appel aux propriétés élémentaires des nombres complexes.

Résolution

$\boxed{z_1 = (3-i)(5+2i)}$

On développe le produit proposé et on regroupe les termes (réels et imaginaires) :

$$z_1 = (3-i)(5+2i) = 15+6i-5i-2i^2 = 15+i+2 = \boxed{17+i}$$

$\boxed{z_2 = -i(18-2i)}$

$$z_2 = -i(18-2i) = -18i+2i^2 = -18i-2 = \boxed{-2-18i}$$

$\boxed{z_3 = (4+i)(-2+i)(1-3i)}$

$$z_3 = (4+i)(-2+i)(1-3i) = \left(-8+4i-2i+i^2\right)(1-3i) = (-9+2i)(1-3i)$$
$$= -9+27i+2i-6i^2 = -9+29i+6 = \boxed{-3+29i}$$

$\boxed{z_4 = (4-3i)^2}$

L'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ est utilisable dans $\mathbb{C}$ et on a :

$$z_4 = (4-3i)^2 = 16 - 24i + (-3i)^2 = 16 - 24i - 9 = \boxed{7-24i}$$

$\boxed{z_5 = \left(5+\sqrt{2}i\right)^2}$

$$z_5 = \left(5+\sqrt{2}i\right)^2 = 25 + 10\sqrt{2}i + 2i^2 = 25 + 10\sqrt{2}i - 2 = \boxed{23+10\sqrt{2}i}$$

$\boxed{z_6 = \left(1-\sqrt{3}i\right)^3}$

On peut, avec les nombres complexes, utiliser l'égalité : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$:

$$\begin{aligned}
z_6 &= \left(1-\sqrt{3}i\right)^3 \\
&= 1 + 3\left(-\sqrt{3}i\right) + 3\left(-\sqrt{3}i\right)^2 + \left(-\sqrt{3}i\right)^3 \\
&= 1 - 3\sqrt{3}i + 3\left(3i^2\right) - 3\sqrt{3}i^3 \\
&= 1 - 3\sqrt{3}i - 9 + 3\sqrt{3}i \\
&= \boxed{-8}
\end{aligned}$$

$\boxed{z_7 = (-1-2i)^4}$

$$\begin{aligned}
z_7 &= (-1-2i)^4 = (1+2i)^4 = 1 + 4(2i) + 6(2i)^2 + 4(2i)^3 + (2i)^4 \\
&= 1 + 8i + 24i^2 + 32i^3 + 16i^4 = 1 + 8i - 24 - 32i + 16 \\
&= \boxed{-7-24i}
\end{aligned}$$

$\boxed{z_8 = \dfrac{1-3i}{2+i}}$

On transforme ici classiquement la fraction en multipliant le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur pour que le dénominateur de la nouvelle fraction soit réel :

$$z_8 = \frac{1-3i}{2+i} = \frac{(1-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i-6i+3i^2}{4-i^2} = \frac{2-7i-3}{4+1} = \frac{-1-7i}{5} = \boxed{-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i}$$

$$\boxed{z_9 = \frac{1+i}{2-i}}$$

$$z_9 = \frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+2i+i^2}{4-i^2} = \frac{2+3i-1}{4+1} = \frac{1+3i}{5} = \boxed{\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i}$$

$$\boxed{z_{10} = \frac{5i(3-i)}{4+i}}$$

On peut ici commencer par développer le numérateur ou, conserver 5i en facteur et travailler sur la fraction $\frac{3-i}{4+i}$. Nous développons la deuxième approche :

$$\begin{aligned} z_{10} &= \frac{5i(3-i)}{4+i} = 5i\frac{(3-i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = 5i\frac{12-3i-4i+i^2}{16-i^2} = 5i\frac{12-7i-1}{16+1} \\ &= 5i\frac{11-7i}{17} = \frac{5}{17}\left(11i-7i^2\right) = \frac{5}{17}(11i+7) = \boxed{\frac{35}{17}+\frac{55}{17}i} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_{11} = \frac{6-5i}{1+i} + \frac{-2+7i}{-1+i}}$$

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{6-5i}{1+i} + \frac{-2+7i}{-1+i} = \frac{6-5i}{1+i} + \frac{2-7i}{1-i} = \frac{(6-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} + \frac{(2-7i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{1}{1-i^2}\left((6-5i)(1-i)+(2-7i)(1+i)\right) = \frac{1}{2}\left(6-6i-5i+5i^2+2+2i-7i-7i^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(6-11i-5+2-5i+7) = \frac{1}{2}(10-16i) \\ &= \boxed{5-8i} \end{aligned}$$

$$\boxed{z_{12} = \frac{5+i}{2i} + \frac{2+3i}{1-i}}$$

$$\begin{aligned} z_{12} &= \frac{5+i}{2i} + \frac{2+3i}{1-i} = \frac{i(5+i)}{2i^2} + \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{-1+5i}{-2} + \frac{2+2i+3i+3i^2}{1-i^2} \\ &= \frac{1-5i}{2} + \frac{2+5i-3}{2} \\ &= \frac{1-5i}{2} + \frac{-1+5i}{2} \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

Résultat final

$$z_1 = 17 + i \qquad z_2 = -2 - 18i$$
$$z_3 = -3 + 29i \qquad z_4 = 7 - 24i$$
$$z_5 = 23 + 10\sqrt{2}i \qquad z_6 = -8$$
$$z_7 = -7 - 24i \qquad z_8 = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$
$$z_9 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \qquad z_{10} = \frac{35}{17} + \frac{55}{17}i$$
$$z_{11} = 5 - 8i \qquad z_{12} = 0$$