Résoudre le système :

$$\begin{cases} (3+i)z & + & (-1+i)z' & = & 2 \\ 2iz & - & z' & = & -1 \end{cases}$$

Analyse

Le système se résout classiquement. Le fait que les coefficients soient complexes n'influe pas sur les méthodes utilisées. Nous en proposons ici deux : élimination de l'une des inconnues et utilisation des déterminants.

Résolution

1ère méthode : élimination de l'une des inconnues

La forme de la seconde équation nous conduit à éliminer l'inconnue z'. En appelant (L_1) et (L_2) les lignes du système, on a :

$$\begin{cases} (3+i)z & + & (-1+i)z' & = & 2 & (\mathrm{L}_1) \\ 2iz & - & z' & = & -1 & (\mathrm{L}_2) \end{cases}$$

On peut alors supprimer l'inconnue z' dans la première ligne en remplaçant cette dernière par $(\mathrm{L}_1)+(-1+i)(\mathrm{L}_2)$. Le système initial est alors équivalent au système :

$$\begin{cases} \left((3+i)+2i(-1+i)\right)z & & & = & 2-(-1+i) & (\mathrm{L}_1) \\ 2iz & - & z' & = & -1 & (\mathrm{L}_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-i)z & = & 3-i \\ z' & = & 2iz+1 \end{cases}$$

La première ligne fournit alors :

$$z=\frac{3-i}{1-i}=\frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+3i-i+1}{1+1}=\frac{4+2i}{2}=2+i \rightarrow \boxed{z=2+i}$$

La seconde ligne nous donne alors immédiatement :

$$z'=2iz+1=2i(2+i)+1=4i-2+1=-1+4i \rightarrow \boxed{z'=-1+4i}$$

2ème méthode : utilisation des déterminants

Le déterminant du système vaut :

$$d = \begin{vmatrix} 3+i & -1+i \\ 2i & -1 \end{vmatrix} = -(3+i) - 2i(-1+i) = -3 - i + 2i + 2 = -1 + i$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{d}\begin{vmatrix} 2 & -1+i \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{-1+i}(-2+-1+i) = \frac{-3+i}{-1+i} = \frac{3-i}{1-i} = \frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i-i+1}{2} = \frac{4+2i}{2} = \boxed{2+i} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{d}\begin{vmatrix} 3+i & 2 \\ 2i & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{-1+i}(-3-i-4i) = \frac{-3-5i}{-1+i} = \frac{3+5i}{1-i} = \frac{(3+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i+5i-5}{2} = \frac{-2+8i}{2} = \boxed{-1+4i} \end{aligned}$$

On retrouve le résultat précédemment obtenu.

Résultat final

Le système admet comme unique solution le couple $(z, z') = (2+i, -1+4i)$.