Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3+\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\right)z^2+\left(6+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+3=0$$

sachant qu'elle admet une solution réelle.

Analyse

On commence par déterminer la racine réelle.

Une factorisation de l'expression $z^3+\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\right)z^2+\left(6+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+3$ permet alors de se ramener à une équation du second degré.

Résolution

Notons $P(z)=z^3+\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\right)z^2+\left(6+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+3$.

Notons α la racine réelle de l'équation considérée. On a donc $P(\alpha)=0$.

C'est à dire : $\alpha^3+\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\right)\alpha^2+\left(6+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\alpha+3=0$.

α étant réel, nous pouvons faire apparaître la partie réelle et la partie imaginaire du membre de gauche :

$$\left(\alpha^3+\frac{1}{2}\alpha^2+6\alpha+3\right)+i\left(\sqrt{3}\alpha^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)=0$$

La partie imaginaire étant nulle, on résout : $\sqrt{3}\alpha^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha=0$. Soit : $\sqrt{3}\alpha\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=0$.

Cette dernière équation admet comme solutions 0 et $-\frac{1}{2}$.

Or, 0 n'annule pas la partie réelle $\alpha^3+\frac{1}{2}\alpha^2+6\alpha+3$ (on constate également que l'on a : $P(0)\neq 0$).

On en déduit que la solution réelle de l'équation $z^3+\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\right)z^2+\left(6+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+3=0$ est $-\frac{1}{2}$.

A partir du résultat précédent et sachant que le coefficient de z^3 du polynôme P est égal à 1, on peut le factoriser sous la forme :

$$P(z)=\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$$

où a et b sont deux complexes à déterminer.

En développant, on obtient : $P(z)=z^3+\left(\frac{1}{2}+a\right)z^2+\left(\frac{a}{2}+b\right)z+\frac{b}{2}$.

Or, $P(z)=z^3+\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\right)z^2+\left(6+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+3$.

Par identification, on obtient le système :

$$\begin{cases}\frac{1}{2}+a=\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\\ \frac{a}{2}+b=6+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{b}{2}=3\end{cases}$$

La première ligne donne immédiatement : $a=i\sqrt{3}$. La dernière donne : $b=6$.
On constate alors que la seconde égalité est vérifiée.
D'où, finalement :

$$P(z)=\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z^2+i\sqrt{3}z+6\right)$$

On va maintenant résoudre : $z^2+i\sqrt{3}z+6=0$.

Le discriminant vaut : $\left(i\sqrt{3}\right)^2-4\times 6=-3-24=-27=\left(i3\sqrt{3}\right)^2$. D'où les racines complexes :

$$z_1=\frac{-i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}}{2}=\frac{-4i\sqrt{3}}{2}=-2i\sqrt{3} \text{ et } z_2=\frac{-i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}}{2}=\frac{2i\sqrt{3}}{2}=i\sqrt{3}$$

Finalement : $P(z)=\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z+2i\sqrt{3}\right)$ et l'équation admet comme solutions : $-\frac{1}{2}$, $i\sqrt{3}$ et $-2i\sqrt{3}$.

Résultat final

L'équation $z^3+\left(\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\right)z^2+\left(6+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+3=0$

admet comme solutions : $-\frac{1}{2}$, $i\sqrt{3}$ et $-2i\sqrt{3}$.