

Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul on pose :

$$C_n = 1 + \cos a + \cos 2a + \cos 3a + \dots + \cos na$$

$$S_n = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \dots + \sin na$$

Calculer C_n et S_n (on pourra poser $S = C_n + iS_n$).

Analyse

Un calcul très classique. La suggestion permet de faire apparaître une somme de termes d'une suite géométrique. Mais ... attention au cas particulier !

Résolution

Comme suggéré, nous posons : $S = C_n + iS_n$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} S &= C_n + iS_n \\ &= 1 + \cos a + \cos 2a + \dots + \cos na + i(\sin a + \sin 2a + \dots + \sin na) \\ &= 1 + (\cos a + i \sin a) + (\cos 2a + i \sin 2a) + \dots + (\cos na + i \sin na) \\ &= 1 + e^{ia} + e^{2ia} + \dots + e^{nia} \end{aligned}$$

Cette somme est une somme de $n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison e^{ia} qui peut être égale à 1.

On doit donc distinguer deux cas :

→ Si $a = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Dans ce cas, $e^{ia} = 1$ et on a simplement : $S = C_n + iS_n = 1 + e^{ia} + e^{2ia} + \dots + e^{nia} = n+1$.

On en tire immédiatement :

$$\boxed{\begin{array}{l} C_n = n+1 \\ S_n = 0 \end{array}}$$

→ Si $a \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Dans ce cas, $e^{ia} \neq 1$ et on peut utiliser la formule classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On obtient ici :

$$\begin{aligned} S &= C_n + iS_n \\ &= 1 + e^{ia} + e^{2ia} + \dots + e^{nia} \\ &= \frac{1 - e^{(n+1)ia}}{1 - e^{ia}} \end{aligned}$$

Pour pouvoir facilement exprimer C_n et S_n , on fait apparaître des sinus au numérateur et au dénominateur en factorisant par les exponentielles d'argument moitié :

$$\begin{aligned} S &= C_n + iS_n \\ &= 1 + e^{ia} + e^{2ia} + \dots + e^{nia} \\ &= \frac{1 - e^{(n+1)ia}}{1 - e^{ia}} \\ &= \frac{e^{(n+1)ia} - 1}{e^{ia} - 1} \\ &= \frac{e^{\frac{(n+1)ia}{2}} \left(e^{\frac{(n+1)ia}{2}} - e^{-\frac{(n+1)ia}{2}} \right)}{e^{\frac{ia}{2}} \left(e^{\frac{ia}{2}} - e^{-\frac{ia}{2}} \right)} \\ &= \frac{e^{\frac{(n+1)ia}{2}} 2i \sin \frac{(n+1)a}{2}}{e^{\frac{ia}{2}} 2i \sin \frac{a}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} e^{\frac{nia}{2}} \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \left(\cos \frac{n}{2} a + i \sin \frac{n}{2} a \right) \end{aligned}$$

Il vient alors immédiatement :

$$C_n = \frac{\sin \frac{(n+1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cos \frac{na}{2}$$
$$S_n = \frac{\sin \frac{(n+1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \sin \frac{na}{2}$$

Résultat final

Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul, on a :

$$\text{Si } a = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$C_n = 1 + \cos a + \cos 2a + \dots + \cos na = n+1 \text{ et } S_n = 0$$

$$\text{Si } a \neq 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$C_n = \frac{\sin \frac{(n+1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cos \frac{na}{2} \text{ et } S_n = \frac{\sin \frac{(n+1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \sin \frac{na}{2}$$