

Soit z un complexe. On définit :

$$Z = \frac{1}{1 + \frac{1}{z}}$$

1. Pour quelles valeurs de z , le complexe Z est-il défini ?
2. Déterminer $\operatorname{Re}(Z)$ et $\operatorname{Im}(Z)$ en fonction de $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$;
3. Pour quelles valeurs de z , le complexe Z est-il réel ? Imaginaire pur ? (on donnera une interprétation géométrique des résultats obtenus)

Analyse

Un calcul très classique. La suggestion permet de faire apparaître une somme de termes d'une suite géométrique. Mais ... attention au cas particulier !

Résolution

1. La présence de l'inverse $\frac{1}{z}$ au dénominateur impose d'emblée $z \neq 0$.

Ensuite, Z sera défini si le dénominateur est non nul, c'est-à-dire pour tout complexe z non nul tel que $1 + \frac{1}{z} \neq 0$. Or, dans \mathbb{C}^* : $1 + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = -1 \Leftrightarrow z = -1$.

Finalement, Z est défini pour tout z différent de 0 et -1 .

Z est défini pour tout z dans $\mathbb{C} - \{-1; 0\}$.

2. Posons : $z = x + iy$.

On a : $\operatorname{Re}(Z) = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z})$ et $\operatorname{Im}(Z) = \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z})$. Il convient donc d'évaluer \bar{Z} .

$$\bar{Z} = \overline{\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{z}} \right)} = \frac{\bar{1}}{\overline{\left(1 + \frac{1}{z} \right)}} = \frac{1}{\bar{1} + \overline{\left(\frac{1}{z} \right)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\bar{z}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\bar{z}}} = \frac{1}{\frac{\bar{z} + 1}{\bar{z}}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} + 1}$$

En tenant compte de : $Z = \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{z+1}{z}} = \frac{z}{z+1}$, il vient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Z) &= \frac{1}{2}(Z + \bar{Z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z+1} + \frac{\bar{z}}{\bar{z}+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{z(\bar{z}+1) + \bar{z}(z+1)}{(z+1)(\bar{z}+1)} = \frac{1}{2} \frac{z + \bar{z} + 2z\bar{z}}{1 + z + \bar{z} + z\bar{z}} \end{aligned}$$

Or, $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 2x$ et $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$. On a donc :

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{1}{2} \frac{z + \bar{z} + 2z\bar{z}}{1 + z + \bar{z} + z\bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{2x + 2(x^2 + y^2)}{1 + 2x + x^2 + y^2} = \frac{x^2 + x + y^2}{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2 + x + y^2}{(x+1)^2 + y^2}$$

De façon similaire, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(Z) &= \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z+1} - \frac{\bar{z}}{\bar{z}+1}\right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{z(\bar{z}+1) - \bar{z}(z+1)}{(z+1)(\bar{z}+1)} = \frac{1}{2i} \frac{z - \bar{z}}{1 + z + \bar{z} + z\bar{z}} \\ &= \frac{1}{2i} \frac{2i \operatorname{Im}(z)}{1 + z + \bar{z} + z\bar{z}} = \frac{y}{(x+1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}$$

3. En raisonnant dans $\mathbb{C} - \{-1; 0\}$, on a :

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \text{ réel}$$

Géométriquement, on obtient dans le plan complexe l'axe des abscisses privé des points d'abscisse -1 et 0 .

Par ailleurs :

$$Z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + y^2}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 = 0$$

Or, on a : $x^2 + x + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4}$.

Il vient alors : $x^2 + x + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

L'équation $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ est celle, dans le plan complexe, du cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Les points de coordonnées $(-1; 0)$ et $(0; 0)$ (correspondant au fait au point d'intersection du cercle et de l'axe des abscisses) sont à exclure. On obtient donc finalement le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points de coordonnées $(-1; 0)$ et $(0; 0)$ (c'est-à-dire deux demi-cercles ouverts symétriques par rapport à l'axe des abscisses).

Finalement :

- Z est un réel si, et seulement si, z est un réel, différent de -1 et 0 . Dans le plan complexe, on obtient l'axe des abscisses privé des points de coordonnées $(-1; 0)$ et $(0; 0)$.
- Z est un imaginaire pur si, et seulement si, $z = x + iy$ z est différent de -1 et 0 et vérifie $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Dans le plan complexe, on obtient le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points de coordonnées $(-1; 0)$ et $(0; 0)$.