

Soit l'équation :

$$z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0 \quad (E)$$

1. Montrer qu'il existe un réel solution de (E).
2. Déterminer alors toutes les solutions de (E).

Analyse

En cherchant une racine réelle, on peut facilement donner la forme algébrique du complexe correspondant au membre de gauche. Dès lors que la racine réelle est trouvée, la factorisation du membre de gauche de (E) permet de conclure.

Résolution

1. Soit x une solution réelle de (E). On a :

$$\begin{aligned} x \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow \\ x^3 - (3+4i)x^2 - 4(1-3i)x + 12 &= 0 \Leftrightarrow \\ (x^3 - 3x^2 - 4x + 12) + i(-4x^2 + 12x) &= 0 \Leftrightarrow \\ (x^3 - 3x^2 - 4x + 12) - 4ix(x-3) &= 0 \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 \\ 4x(x-3) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La deuxième équation du système nous donne immédiatement $x = 0$ ou $x = 3$. On constate alors que seule la valeur 3 est solution de la première équation. D'où :

(E) admet 3 comme racine réelle.

2. D'après le résultat obtenu à la question précédente et comme le coefficient de z^3 dans l'expression $z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12$ est égal à 1, nous pouvons écrire :

$$z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = (z-3)(z^2 + az + b)$$

Or, on a :

$$(z-3)(z^2 + az + b) = z^3 + (a-3)z^2 + (-3a+b)z - 3b$$

En procédant par identification, on obtient alors :

$$\begin{cases} a - 3 = -(3 + 4i) \\ -3a + b = -4(1 - 3i) \\ -3b = 12 \end{cases}$$

La première équation donne immédiatement : $a = -4i$ et la troisième : $b = -4$.
On constate alors que la seconde équation est vérifiée.

On a donc :

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 - 4(1 - 3i)z + 12 = (z - 3)(z^2 - 4iz - 4)$$

Or, $z^2 - 4iz - 4 = (z - 2i)^2$. On a donc, finalement :

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 - 4(1 - 3i)z + 12 = (z - 3)(z - 2i)^2$$

Les solutions de l'équation (E) sont 3 et $2i$.

Résultat final

Les solutions de l'équation $z^3 - (3 + 4i)z^2 - 4(1 - 3i)z + 12 = 0$ sont 3 et $2i$.