Déterminer dans le plan complexe l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'équation :

$$\arg z + \arg(\bar{z} - 1) = \frac{\pi}{2} \qquad (\mathrm{E})$$

Analyse

On peut procéder de diverses façons : soit en travaillant avec la forme algébrique du complexe z, soit en manipulant des arguments. Nous développons ces deux approches.

Résolution

1ère approche

Les deux arguments sont définis dès lors que l'on a : $z \neq 0$ et $\bar{z} - 1 \neq 0$. On cherche donc les solutions dans $\mathbb{C} - \{0;1\}$.

On a : $\arg z + \arg(\bar{z} - 1) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg\left[z(\bar{z} - 1)\right] = \frac{\pi}{2}$.

Cette deuxième égalité équivaut à écrire que le complexe $z(z-1)$ est un imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive.

Posons alors : $z = x + iy$. Il vient :

$$z(\bar{z} - 1) = (x + iy)(x - 1 - iy) = \left[x(x-1) + y^2\right] + i\left[-xy + y(x-1)\right] = \left[x(x-1) + y^2\right] - iy$$

On a alors :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left[z(\bar{z}-1)\right] = 0 \\ \mathrm{Im}\left[z(\bar{z}-1)\right] > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) + y^2 = 0 \\ -y > 0 \end{cases}$$

Or, $x(x-1) + y^2 = x^2 - x + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2$. On a donc :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left[z(\bar{z}-1)\right] = 0 \\ \mathrm{Im}\left[z(\bar{z}-1)\right] > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) + y^2 = 0 \\ -y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ y < 0 \end{cases}$$

L'équation $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ est celle du cercle de centre $\boldsymbol{\Omega}\left(\frac{1}{2};0\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

Un tel cercle est la réunion de deux demi-cercles : le premier, d'équation $y=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$, situé <u>au-dessus</u> de l'axe des abscisses (les extrémités de coordonnées $(0;0)$ et $(1;0)$ étant situées <u>sur</u> l'axe des abscisses) ; le second, d'équation $y=-\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$, situé <u>sous</u> l'axe des abscisses (ses extrémités sont les mêmes que celles de l'autre demi-cercle).

Comme on veut : $y<0$, on ne retient que le second demi-cercle <u>à l'exclusion</u> de ses extrémités.

2ème approche

On utilise $\overline{z}-1=\overline{z-1}$. On a alors :

$$\arg z+\arg\left(\overline{z}-1\right)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \arg z+\arg\overline{z-1}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \arg z-\arg\left(z-1\right)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \arg\frac{z}{z-1}=\frac{\pi}{2}$$

Introduisons alors le point A d'affixe égale à 1. On a : $\arg\frac{z}{z-1}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ et, de fait :

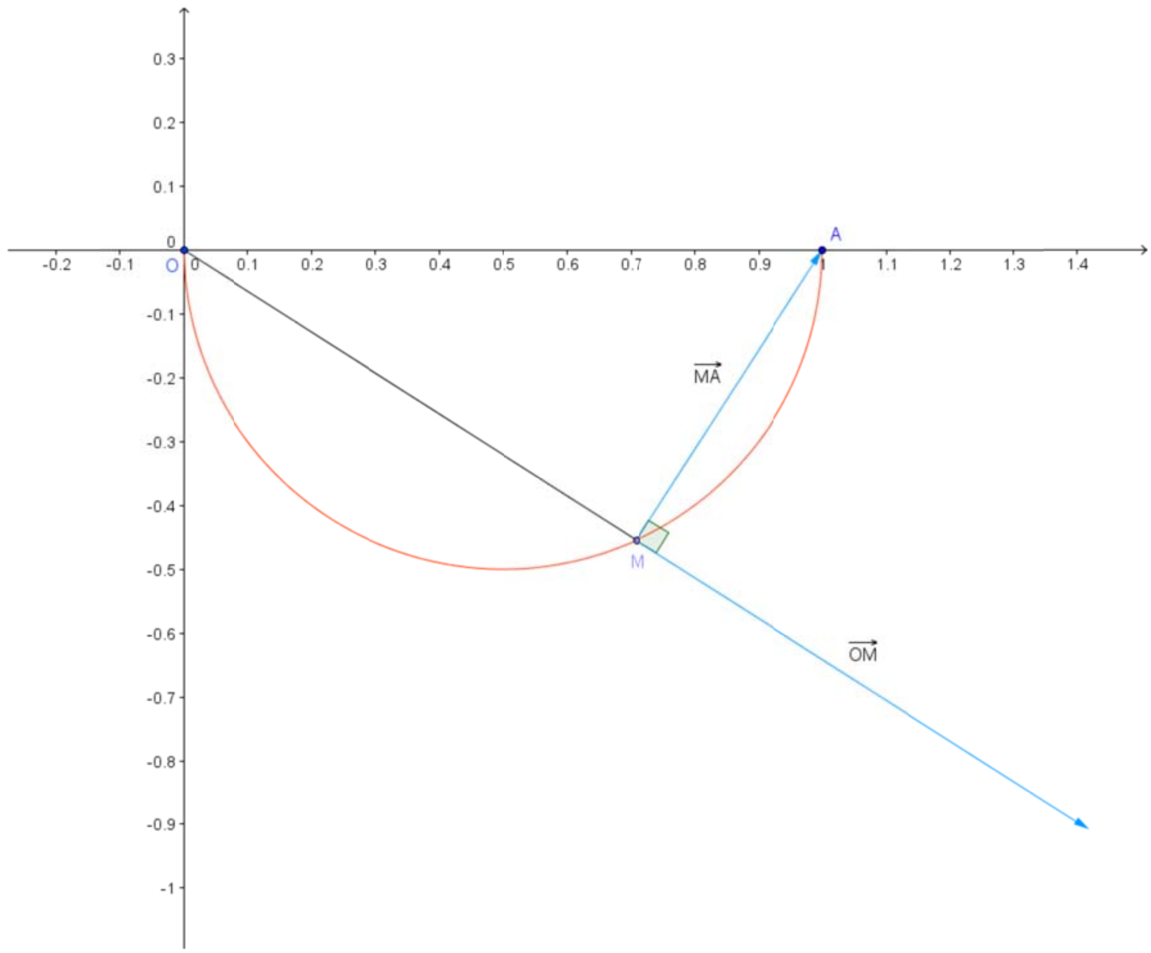
$$\arg z+\arg\left(\overline{z}-1\right)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

On en déduit que le triangle (M est différent des points O et A) AOM est rectangle en M. Le point M appartient donc au cercle de diamètre $[\mathrm{OA}]$ privé des points O et A. Comme A est situé, sur l'axe des abscisses, à droite de O et que l'on a :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}},\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)=-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}},\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)=\frac{\pi}{2}$$

on en déduit que le point M appartient au demi-cercle de diamètre $[\mathrm{OA}]$ privé de ses extrémités et situé sous la droite (OA) (voir la figure ci-dessous), c'est-à-dire l'axe des abscisses.

On a ainsi retrouvé le résultat établi précédemment.



Résultat final

Les points du plan complexe dont l'affixe vérifie l'équation $\arg z + \arg(\overline{z} - 1) = \frac{\pi}{2}$ sont les points du cercle de diamètre $[\text{OA}]$ (A étant le point d'affixe 1) d'ordonnées strictement négatives.