

Soit T la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{5}z + 8i$.

Montrer que T admet un unique point invariant, noté Ω , et la caractériser.

Analyse

Un exercice très classique ... L'invariance se traduit par l'égalité des affixes. Ensuite, on cherche à exprimer $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$ (ω désignant l'affixe du point invariant).

Résolution

Un point M d'affixe z du plan complexe est invariant par la transformation T si, et seulement si, on a : $z' = z$.

On a alors :

$$\begin{aligned}z' = z &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{5}z + 8i = z &\Leftrightarrow \\ 8i = \frac{4}{5}z &\Leftrightarrow \\ z = \frac{5}{4} \times 8i &\Leftrightarrow \\ z = 10i &\end{aligned}$$

La transformation T admet comme unique point invariant le point Ω d'affixe $10i$.

On a alors :

$$z' = \frac{1}{5}z + 8i \Leftrightarrow$$

$$z' - 10i = \frac{1}{5}z + 8i - 10i \Leftrightarrow$$

$$z' - 10i = \frac{1}{5}z - 2i \Leftrightarrow$$

$$z' - 10i = \frac{1}{5}(z - 10i)$$

On obtient une égalité de la forme $z' - \omega = k(z - \omega)$ qui nous permet d'identifier l'homothétie de centre Ω d'affixe $10i$ et de rapport $\frac{1}{5}$.

La transformation T est l'homothétie de centre Ω d'affixe $10i$ et de rapport $\frac{1}{5}$.