Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b ($a \neq b$).
Soit M un point d'affixe z.

Déterminer l'affixe z' de M', symétrique orthogonal de M par rapport à la droite (AB).

Analyse

Un exercice très classique … application directe du cours. Il convient fondamentalement de reprendre la définition du symétrique orthogonal d'un point par rapport à une droite (pensez à la notion de médiatrice …).

Résolution

On a, *par définition* :

$$\text{M}' \text{ symétrique de M par rapport à } (\text{AB}) \Leftrightarrow (\text{AB}) \text{ est la médiatrice du segment } [\text{MM}'].$$

Appelons alors I le milieu du segment $[\text{MM}']$. *Par définition* de la médiatrice, on a :

$$(\text{AB}) \text{ médiatrice du segment } [\text{MM}'] \Leftrightarrow (\text{AB}) \text{ coupe } [\text{MM}'] \text{ perpendiculairement en I.}$$

Soit encore :

$$(\text{AB}) \text{ médiatrice du segment } [\text{MM}'] \Leftrightarrow \begin{cases} \text{A, B et I alignés} \\ (\text{AB}) \perp (\text{MM}') \end{cases}$$

Enfin :

$$(\text{AB}) \text{ médiatrice du segment } [\text{MM}'] \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AI}}\right) = 0 \ [\pi] \\ \left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{MM}'}\right) = \dfrac{\pi}{2} \ [\pi] \end{cases}$$

L'affixe du point I vaut : $\dfrac{z+z'}{2}$.

On a alors :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AI}}\right)=0\ [\pi]\Leftrightarrow \arg\frac{\frac{z+z'}{2}-a}{b-a}=0\ [\pi]\Leftrightarrow \frac{\frac{z+z'}{2}-a}{b-a}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \frac{\frac{z+z'}{2}-a}{b-a}=\overline{\left(\frac{\frac{z+z'}{2}-a}{b-a}\right)}$$

En utilisant les propriétés de la conjugaison, on obtient alors :

$$\frac{\frac{z+z'}{2}-a}{b-a}=\overline{\left(\frac{\frac{z+z'}{2}-a}{b-a}\right)}\Leftrightarrow \frac{\frac{z+z'}{2}-a}{b-a}=\frac{\overline{\frac{z+z'}{2}-a}}{\overline{b-a}}=\frac{\overline{\frac{z+z'}{2}}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}=\frac{\frac{\overline{z}+\overline{z'}}{2}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}\Leftrightarrow$$

$$\left(\overline{b}-\overline{a}\right)\left(\frac{z+z'}{2}-a\right)=\left(b-a\right)\left(\frac{\overline{z}+\overline{z'}}{2}-\overline{a}\right)\Leftrightarrow\left(\overline{b}-\overline{a}\right)\left(z+z'\right)-2a\overline{b}=\left(b-a\right)\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)-2b\overline{a}\Leftrightarrow$$

$$\left(\overline{b}-\overline{a}\right)z'-\left(b-a\right)\overline{z'}=-\left(\overline{b}-\overline{a}\right)z+\left(b-a\right)\overline{z}+2a\overline{b}-2b\overline{a}$$

On a par ailleurs :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\right)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\Leftrightarrow \arg\frac{z'-z}{b-a}=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\Leftrightarrow\frac{z'-z}{b-a}\text{ imaginaire pur}\Leftrightarrow\frac{z'-z}{b-a}=-\overline{\left(\frac{z'-z}{b-a}\right)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{z'-z}{b-a}=-\frac{\overline{z'-z}}{\overline{b-a}}=-\frac{\overline{z'}-\overline{z}}{\overline{b}-\overline{a}}\Leftrightarrow\left(\overline{b}-\overline{a}\right)\left(z'-z\right)=-\left(b-a\right)\left(\overline{z'}-\overline{z}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\overline{b}-\overline{a}\right)z'+\left(b-a\right)\overline{z'}=\left(\overline{b}-\overline{a}\right)z+\left(b-a\right)\overline{z}$$

On dispose finalement du système :

$$\begin{cases}\left(\overline{b}-\overline{a}\right)z'-\left(b-a\right)\overline{z'}=-\left(\overline{b}-\overline{a}\right)z+\left(b-a\right)\overline{z}+2a\overline{b}-2b\overline{a}\\ \left(\overline{b}-\overline{a}\right)z'+\left(b-a\right)\overline{z'}=\left(\overline{b}-\overline{a}\right)z+\left(b-a\right)\overline{z}\end{cases}$$

En additionnant ces deux égalités membre à membre, on obtient immédiatement :

$$\left(\overline{b}-\overline{a}\right)z'=\left(b-a\right)\overline{z}+a\overline{b}-b\overline{a}$$

Soit, finalement :

$$z'=\frac{\left(b-a\right)\overline{z}+a\overline{b}-b\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}=\frac{b\left(\overline{z}-\overline{a}\right)-a\left(\overline{z}-\overline{b}\right)}{\overline{b}-\overline{a}}$$

Résultat final

Le point M' symétrique de M, d'affixe *z*, par rapport à la droite (AB) (A et B étant des points d'affixes respectives *a* et *b*) a pour affixe :

$$z' = \frac{b\left(\overline{z} - \overline{a}\right) - a\left(\overline{z} - \overline{b}\right)}{\overline{b} - \overline{a}}$$