Soit A, B et C trois points non alignés du plan d'affixes respectives a, b et c.

Déterminer l'affixe ω du point Ω, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Analyse

Encore un exercice classique, application directe du cours, qui conduit à exploiter la caractérisation fondamentale du centre du cercle circonscrite d'un triangle.

Résolution

On a, *par définition* :

Ω est le point d'intersection des médiatrices des segments $[\mathrm{AB}]$, $[\mathrm{AC}]$ et $[\mathrm{BC}]$.

Nous allons dans un premier temps utiliser le fait que le point Ω appartient à la médiatrice du segment $[\mathrm{AB}]$.

Appelons I le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$. *Par définition* de la médiatrice, on a :

Le point Ω appartient à la médiatrice du segment $[\mathrm{AB}]$ si, et seulement si, les droites (AB) et $(\Omega\mathrm{I})$ sont perpendiculaires.

Soit :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}}\right)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

L'affixe du point I vaut : $\dfrac{a+b}{2}$.

On a alors :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\Omega\mathrm{I}}\right)=\frac{\pi}{2}\ \left[\pi\right]\Leftrightarrow \arg\frac{\dfrac{a+b}{2}-\omega}{b-a}=\frac{\pi}{2}\ \left[\pi\right]\Leftrightarrow \frac{\dfrac{a+b}{2}-\omega}{b-a}\ \text{imaginaire pur}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\dfrac{a+b}{2}-\omega}{b-a}=-\overline{\left(\frac{\dfrac{a+b}{2}-\omega}{b-a}\right)}\Leftrightarrow \frac{\dfrac{a+b}{2}-\omega}{b-a}=-\frac{\overline{\dfrac{a+b}{2}-\omega}}{\overline{b-a}}=-\frac{\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}-\bar{\omega}}{\bar{b}-\bar{a}}\Leftrightarrow$$

$$\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\left(\frac{a+b}{2}-\omega\right)=-\left(b-a\right)\left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}-\bar{\omega}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\frac{a+b}{2}-\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\omega=-\left(b-a\right)\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}+\left(b-a\right)\bar{\omega}\Leftrightarrow$$

$$\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\omega+\left(b-a\right)\bar{\omega}=\left(b-a\right)\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}+\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\frac{a+b}{2}$$

En procédant de façon similaire avec le segment $\left[\mathrm{AC}\right]$, on obtient une deuxième égalité (il suffit, formellement, de remplacer « *b* » par « *c* » dans l'égalité obtenue ci-dessus) :

$$\left(\bar{c}-\bar{a}\right)\omega+\left(c-a\right)\bar{\omega}=\left(c-a\right)\frac{\bar{a}+\bar{c}}{2}+\left(\bar{c}-\bar{a}\right)\frac{a+c}{2}$$

On dispose finalement du système :

$$\begin{cases}\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\omega+\left(b-a\right)\bar{\omega}=\left(b-a\right)\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}+\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\dfrac{a+b}{2}\\ \left(\bar{c}-\bar{a}\right)\omega+\left(c-a\right)\bar{\omega}=\left(c-a\right)\dfrac{\bar{a}+\bar{c}}{2}+\left(\bar{c}-\bar{a}\right)\dfrac{a+c}{2}\end{cases}$$

Puisque c'est le complexe ω qui nous intéresse, on procède par combinaison pour éliminer $\bar{\omega}$:

$$\begin{aligned}\left[\left(c-a\right)\left(\bar{b}-\bar{a}\right)-\left(b-a\right)\left(\bar{c}-\bar{a}\right)\right]\omega=\frac{1}{2}\left(c-a\right)&\left[\left(b-a\right)\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\left(a+b\right)\right]\\ -\frac{1}{2}\left(b-a\right)&\left[\left(c-a\right)\left(\bar{a}+\bar{c}\right)+\left(\bar{c}-\bar{a}\right)\left(a+c\right)\right]\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\left[c\bar{b}-c\bar{a}-a\bar{b}\cancel{+a\bar{a}}-b\bar{c}+\bar{a}b+a\bar{c}\cancel{-a\bar{a}}\right]\omega=\frac{1}{2}\left(c-a\right)&\left[\cancel{\bar{a}b}+b\bar{b}-a\bar{a}\cancel{-a\bar{b}}\cancel{+a\bar{b}}+b\bar{b}-a\bar{a}\cancel{-\bar{a}b}\right]\\ -\frac{1}{2}\left(b-a\right)&\left[\cancel{\bar{a}c}+c\bar{c}-a\bar{a}\cancel{-a\bar{c}}\cancel{+a\bar{c}}+c\bar{c}-a\bar{a}\cancel{-\bar{a}c}\right]\end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\left[c\bar{b}-c\bar{a}-a\bar{b}-b\bar{c}+\bar{a}b+a\bar{c}\right]\omega=(c-a)\left(b\bar{b}-a\bar{a}\right)-(b-a)\left(c\bar{c}-a\bar{a}\right)\Leftrightarrow$$

$$\left[a\left(\bar{c}-\bar{b}\right)+b\left(\bar{a}-\bar{c}\right)+c\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\right]\omega=cb\bar{b}-ca\bar{a}-ab\bar{b}\cancel{+a^2\bar{a}}-bc\bar{c}+ba\bar{a}+ac\bar{c}\cancel{-a^2\bar{a}}\Leftrightarrow$$

$$\left[a\left(\bar{c}-\bar{b}\right)+b\left(\bar{a}-\bar{c}\right)+c\left(\bar{b}-\bar{a}\right)\right]\omega=ab\left(\bar{a}-\bar{b}\right)+bc\left(\bar{b}-\bar{c}\right)+ca\left(\bar{c}-\bar{a}\right)$$

On montre facilement (raisonnez sur l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$) que l'on a :

$$\text{A, B et C alignés }\Leftrightarrow a\left(\bar{c}-\bar{b}\right)+b\left(\bar{a}-\bar{c}\right)+c\left(\bar{b}-\bar{a}\right)=0$$

On a donc finalement :

$$\omega=-\frac{bc\left(\bar{c}-\bar{b}\right)+ca\left(\bar{a}-\bar{c}\right)+ab\left(\bar{b}-\bar{a}\right)}{a\left(\bar{c}-\bar{b}\right)+b\left(\bar{a}-\bar{c}\right)+c\left(\bar{b}-\bar{a}\right)}$$

On pourra également reprendre le numérateur et obtenir une nouvelle écriture, encore très élégante de part sa symétrie :

$$\omega=\frac{a\left(c\bar{c}-b\bar{b}\right)+b\left(a\bar{a}-c\bar{c}\right)+c\left(b\bar{b}-a\bar{a}\right)}{a\left(\bar{c}-\bar{b}\right)+b\left(\bar{a}-\bar{c}\right)+c\left(\bar{b}-\bar{a}\right)}$$

Résultat final

Le point Ω, centre du cercle circonscrite du triangle ABC où *a*, *b* et *c* sont les affixes respectives des trois sommets A, B et C, admet pour affixe :

$$\omega=-\frac{bc\left(\bar{c}-\bar{b}\right)+ca\left(\bar{a}-\bar{c}\right)+ab\left(\bar{b}-\bar{a}\right)}{a\left(\bar{c}-\bar{b}\right)+b\left(\bar{a}-\bar{c}\right)+c\left(\bar{b}-\bar{a}\right)}=\frac{a\left(c\bar{c}-b\bar{b}\right)+b\left(a\bar{a}-c\bar{c}\right)+c\left(b\bar{b}-a\bar{a}\right)}{a\left(\bar{c}-\bar{b}\right)+b\left(\bar{a}-\bar{c}\right)+c\left(\bar{b}-\bar{a}\right)}$$