

Résoudre :

$$z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$$

Analyse

Dans un premier temps, nous cherchons classiquement à transformer l'équation (via une « translation » sur la variable initiale) pour faire disparaître le terme en « z^3 ». Nous constatons alors que l'équation se ramène facilement à une équation bicarrée ...

Résolution

On fait apparaître le début du développement d'une puissance quatrième :

$$\begin{aligned} z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 &= z^4 + 4 \times \frac{3}{2} z^3 + 9z^2 + 100 \\ &= \left(z + \frac{3}{2}\right)^4 - 6 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 z^2 - 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 z - \left(\frac{3}{2}\right)^4 + 9z^2 + 100 \\ &= \left(z + \frac{3}{2}\right)^4 - \frac{27}{2} z^2 + 9z^2 - \frac{27}{2} z - \frac{81}{16} + 100 \\ &= \left(z + \frac{3}{2}\right)^4 - \frac{9}{2} z^2 - \frac{27}{2} z - \frac{81}{16} + 100 \\ &= \left(z + \frac{3}{2}\right)^4 - \frac{9}{2} (z^2 + 3z) - \frac{81}{16} + 100 \\ &= \left(z + \frac{3}{2}\right)^4 - \frac{9}{2} \left(z^2 + 2 \times \frac{3}{2} z\right) - \frac{81}{16} + 100 \\ &= \left(z + \frac{3}{2}\right)^4 - \frac{9}{2} \left[\left(z + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] - \frac{81}{16} + 100 \\ &= \left(z + \frac{3}{2}\right)^4 - \frac{9}{2} \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{81}{8} - \frac{81}{16} + 100 \\ &= \left(z + \frac{3}{2}\right)^4 - \frac{9}{2} \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{81}{16} + 100 \\ &= \left(z + \frac{3}{2}\right)^4 - \frac{9}{2} \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1681}{16} \end{aligned}$$

L'équation initiale équivaut donc à l'équation (bicarrée en $z + \frac{3}{2}$) :

$$\left(z + \frac{3}{2}\right)^4 - \frac{9}{2}\left(z + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1681}{16} = 0$$

Posons alors : $Z = \left(z + \frac{3}{2}\right)^2$. On est ainsi ramené à l'équation du second degré :

$$Z^2 - \frac{9}{2}Z + \frac{1681}{16} = 0$$

Le discriminant associé s'écrit :

$$\Delta = \left(-\frac{9}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1681}{16} = \frac{81}{4} - \frac{1681}{4} = -\frac{1600}{4} = -400 = (20i)^2$$

Les deux racines complexes conjuguées de cette équation s'écrivent alors :

$$Z_1 = \frac{-\left(-\frac{9}{2}\right) - 20i}{2} = \frac{9}{4} - 10i \text{ et } Z_2 = \frac{9}{4} + 10i$$

Le changement de variable effectué précédemment nous conduit alors à résoudre les équations :

$$\left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - 10i = \frac{1}{4}(9 - 40i) \text{ et } \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} + 10i = \frac{1}{4}(9 + 40i)$$

Cherchons les racines complexes de $9 - 40i$ sous la forme $x + iy$ (avec x et y réels) :

$$(x + iy)^2 = 9 - 40i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 9 - 40i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ 2xy = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ xy = -20 \end{cases}$$

La deuxième égalité nous donne : $y = -\frac{20}{x}$ et la première se réécrit alors : $x^2 - \frac{400}{x^2} = 9$.

Soit : $x^4 - 9x^2 - 400 = 0$.

Posons $X = x^2$ (réel positif) et considérons l'équation : $X^2 - 9X - 400 = 0$.

Le discriminant associé s'écrit : $\delta = (-9)^2 - 4 \times 1 \times (-400) = 81 + 1600 = 1681 = 41^2$.

Les solutions de cette équation s'écrivent alors :

$$X_1 = \frac{-(-9) - 41}{2} = \frac{9 - 41}{2} = -\frac{32}{2} = -16 \text{ et } X_2 = \frac{9 + 41}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

Comme on cherche des solutions réelles positives, on ne retient que la deuxième solution.

On doit alors résoudre $x^2 = 25$ qui donne immédiatement $x = 5$ ou $x = -5$.

Comme $xy = -20$, on a :

- Pour $x = 5$, $y = -4$.
- Pour $x = -5$, $y = 4$.

Les racines complexes de $9 - 40i$ sont donc : $5 - 4i$ et $-5 + 4i$.

Comme $9 - 40i$ et $9 + 40i$ sont conjugués, on déduit immédiatement de ce qui précède que les racines complexes de $9 + 40i$ sont les conjugués des deux complexes que nous venons d'obtenir : $5 + 4i$ et $-5 - 4i$.

Il nous faut donc résoudre :

$$z + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(5 + 4i) = \frac{5}{2} + 2i$$

$$z + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} + 2i$$

$$z + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} - 2i$$

$$z + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} - 2i$$

On obtient finalement les quatre racines suivantes :

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = \overline{z_1} = 1 - 2i$$

$$z_3 = -4 + 2i$$

$$z_4 = \overline{z_3} = -4 - 2i$$

Résultat final

L'équation $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$ admet quatre racines complexes :

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = \overline{z_1} = 1 - 2i, \quad z_3 = -4 + 2i \quad \text{et} \quad z_4 = \overline{z_3} = -4 - 2i$$