Déterminer dans le plan complexe l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'équation :

$$\left|(1+i)z-2i\right|=2 \qquad (\mathrm{E})$$

Analyse

On peut procéder de diverses façons : soit en travaillant avec la forme algébrique du complexe z, soit en factorisant le complexe $(1+i)z-2i$ et en tirant parti d'une propriété du module.
Nous développons cette seconde approche … moins calculatoire.

Résolution

On a, le module d'un produit étant égal au produit des modules :

$$\left|(1+i)z-2i\right|=2 \Leftrightarrow$$
$$\left|(1+i)\left(z-\frac{2i}{1+i}\right)\right|=2 \Leftrightarrow$$
$$\left|1+i\right|\times\left|z-\frac{2i}{1+i}\right|=2$$

On a facilement : $\left|1+i\right|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Par ailleurs : $\dfrac{2i}{1+i}=\dfrac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=2\dfrac{1+i}{2}=1+i$.

Il vient alors :

$$\left|(1+i)z-2i\right|=2 \Leftrightarrow$$
$$\left|1+i\right|\times\left|z-\frac{2i}{1+i}\right|=2 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{2}\left|z-(1+i)\right|=2 \Leftrightarrow$$
$$\left|z-(1+i)\right|=\sqrt{2}$$

En notant A le point d'affixe : $a=1+i$, l'égalité précédente équivaut finalement à :

$$\mathrm{AM}=\sqrt{2}$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

Résultat final

Les points du plan complexe dont l'affixe vérifie l'équation $\left|(1+i)z-2i\right|=2$ sont les points du cercle de centre A d'affixe $1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$.