

Soit z un nombre complexe.

Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z' où :

$$z' = z - \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \bar{z}$$

Analyse

On peut procéder de diverses façons (après avoir rapidement traité le cas évident $z = 0$) : soit en travaillant avec la forme trigonométrique du complexe z , soit en utilisant sa forme exponentielle. Nous développons ces deux approches, la seconde étant moins calculatoire mais requérant une certaine aisance dans la manipulation des exponentielles complexes.

Résolution

Si z est le complexe nul, on a immédiatement $z' = 0$ et, de fait $|z'| = 0$, l'argument de z' n'étant, par ailleurs, pas défini.

Nous supposons désormais $z' \neq 0$.

Pour « alléger » un peu les écritures, nous allons poser : $\rho = |z|$ et $\theta = \arg z$.

1^{ère} approche : utilisation de la forme trigonométrique de z .

Ici, on a : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ et il vient :

$$\begin{aligned} z' &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta) - \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \rho(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \rho \left[(\cos \theta + i \sin \theta) - \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (\cos \theta - i \sin \theta) \right] \\ &= \rho \left[(\cos \theta + i \sin \theta) - \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{3} \sin \theta \right) - i \left(-\cos \frac{\pi}{3} \sin \theta + \sin \frac{\pi}{3} \cos \theta \right) \right] \\ &= \rho \left[(\cos \theta + i \sin \theta) - \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right) \right] \\ &= \rho \left[\left(\cos \theta - \cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right) + i \left(\sin \theta - \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right) \right] \end{aligned}$$

On utilise alors les deux relations trigonométriques :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

Et :

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} z' &= \rho \left[\left(\cos \theta - \cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right) + i \left(\sin \theta - \sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right) \right] \\ &= \rho \left[-2 \sin \frac{\theta + \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)}{2} \sin \frac{\theta - \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)}{2} + 2i \cos \frac{\theta + \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)}{2} \sin \frac{\theta - \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right)}{2} \right] \\ &= \rho \left[-2 \sin \frac{\pi}{6} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) + 2i \cos \frac{\pi}{6} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= 2\rho \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \left[-\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right] \\ &= 2\rho \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= 2\rho \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

A ce stade, il serait tentant de conclure ... Mais il convient de ne pas se précipiter ! En effet, il convient de discuter suivant le signe de $\sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right)$.

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

On a donc : $\theta - \frac{\pi}{6} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Soit : $\arg z = \frac{\pi}{6} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas, $z' = 0$. Son module est nul et son argument n'est pas défini.

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) > 0$$

On a donc : $\theta - \frac{\pi}{6} \in]2k\pi; (2k+1)\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Soit : $\arg z \in \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi \right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas, on a : $\arg z' = \frac{2\pi}{3}$ et $|z'| = 2|z| \sin\left(\arg z - \frac{\pi}{6}\right)$.

3^{ème} cas : $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) < 0$

On a donc : $\theta - \frac{\pi}{6} \in](2k-1)\pi; 2k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Soit : $\arg z \in \left] \frac{\pi}{6} + (2k-1)\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} z' &= -2\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \left(-\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -2\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) \right) \\ &= -2\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

D'où : $\arg z' = \frac{5\pi}{3}$ et $|z'| = -2|z| \sin\left(\arg z - \frac{\pi}{6}\right)$.

2^{ème} approche : utilisation de la forme exponentielle de z.

On pose donc cette fois : $z = \rho e^{i\theta}$. En tenant compte de : $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, il vient :

$$z' = z - \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \bar{z} = \rho e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}} \rho e^{-i\theta} = \rho \left(e^{i\theta} - e^{i\frac{\pi}{3}} e^{-i\theta} \right) = \rho \left(e^{i\theta} - e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} \right)$$

L'expression entre parenthèses est une différence d'exponentielles complexes et permet « classiquement » de faire apparaître un sinus en mettant en facteur l'exponentielle complexe dont l'argument est égal à la moyenne des deux arguments, soit ici : $\frac{1}{2} \left[\theta + \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \right] = \frac{\pi}{6}$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 z' &= \rho \left(e^{i\theta} - e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} \right) = \rho e^{i\frac{\pi}{6}} \left(e^{i\theta} e^{-i\frac{\pi}{6}} - e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} e^{-i\frac{\pi}{6}} \right) = \rho e^{i\frac{\pi}{6}} \left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)} - e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta-\frac{\pi}{6}\right)} \right) \\
 &= \rho e^{i\frac{\pi}{6}} \left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)} - e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} \right) = \rho e^{i\frac{\pi}{6}} \left(e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)} - e^{-i\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)} \right) = \rho e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2i \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= 2\rho \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) e^{i\frac{\pi}{6}} \times i = 2\rho \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\rho \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) e^{i\frac{4\pi}{6}} \\
 &= 2\rho \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) e^{i\frac{2\pi}{3}}
 \end{aligned}$$

On retrouve l'expression précédente de z' avec $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ en lieu et place de $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

La suite est identique à ce que nous avons fait plus haut.

Résultat final

Pour tout complexe z , on a, en posant $z' = z - \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \bar{z}$:

- Si $z = 0$ ou $\arg z = \frac{\pi}{6} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), alors $z' = 0$ et $|z'| = 0$.
- Si $\arg z \in \left] \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi \right[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), alors $\arg z' = \frac{2\pi}{3}$ et $|z'| = 2|z| \sin \left(\arg z - \frac{\pi}{6} \right)$.
- Si $\arg z \in \left] \frac{\pi}{6} + (2k-1)\pi ; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), alors $\arg z' = \frac{5\pi}{3}$ et $|z'| = -2|z| \sin \left(\arg z - \frac{\pi}{6} \right)$.