

On considère le complexe :  $z = \frac{-3i}{1+i\sqrt{3}}$ .

Calculer  $|z^n|$  pour tout entier  $n$ .

---

## Analyse

Une propriété classique du module nous permet de nous ramener fondamentalement au calcul du module de  $z$ , calcul ne posant pas de difficulté particulière.

---

## Résolution

On a, le complexe  $z$  étant non nul :  $\forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n$ .

Il convient donc ici de calculer :  $|z|$ .

On a facilement :  $|z| = \left| \frac{-3i}{1+i\sqrt{3}} \right| = \frac{|-3i|}{|1+i\sqrt{3}|} = \frac{3}{\sqrt{1+\sqrt{3}^2}} = \frac{3}{\sqrt{1+3}} = \frac{3}{2}$ .

On en déduit finalement :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = \left( \frac{3}{2} \right)^n$$

---

## Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \left| \left( \frac{-3i}{1+i\sqrt{3}} \right)^n \right| = \left( \frac{3}{2} \right)^n$$