On considère le complexe : $z = 1 - i$.

Calculer $S = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{2010}$.

Analyse

Une propriété classique du module nous permet de nous ramener fondamentalement au calcul du module de *z*, calcul ne posant pas de difficulté particulière.

Résolution

Calcul commun aux deux approches.

On a classiquement :

$$S = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{2010} = \frac{1 - z^{2011}}{1 - z}$$

On a immédiatement : $1 - z = 1 - (1 - i) = i$. Il convient donc d'évaluer : z^{2011}.

1ère approche : utilisation du calcul de quelques puissances de z.

On a :

$$z^2 = (1-i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i\,,\ z^3 = z^2 \times z = -2i(1-i) = -2(1+i) \text{ et } z^4 = \left(z^2\right)^2 = (-2i)^2 = -4$$

Il est intéressant d'obtenir un réel. En effectuant alors la division euclidienne de 2011 par 4, il vient :

$$\begin{aligned} z^{2011} &= z^{4\times 502+3} = \left(z^4\right)^{502} \times z^3 = (-4)^{502} \times \left(-2(1+i)\right) \\ &= 4^{502} \times \left(-2(1+i)\right) = 2^{1004}\left(-2(1+i)\right) \\ &= -2^{1005}(1+i) \end{aligned}$$

Alors :

$$1 - z^{2011} = 1 + 2^{1005}(1+i) = \left(1 + 2^{1005}\right) + 2^{1005} i$$

Finalement :

$$S=\frac{1-z^{2011}}{1-z}=\frac{\left(1+2^{1005}\right)+2^{1005}i}{i}=\frac{1+2^{1005}}{i}+2^{1005}=2^{1005}-i\left(1+2^{1005}\right)$$

$$\boxed{S=2^{1005}-i\left(1+2^{1005}\right)}$$

$2^{\text{ème}}$ approche : utilisation de l'exponentielle complexe.

On a facilement : $|z|=\sqrt{2}$ et $z=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} z^{2011} &= \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{2011} = \sqrt{2}^{2011}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{2011} \\ &= \sqrt{2}\times\sqrt{2}^{2010}e^{-i\frac{\pi}{4}\times 2011} = \sqrt{2}\times 2^{1005}e^{-i\left(502\pi+\frac{3\pi}{4}\right)} \\ &= \sqrt{2}\times 2^{1005}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\times 2^{1005}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -2^{1005}\left(1+i\right) \end{aligned}$$

On retrouve le résultat obtenu précédemment et la suite est identique.

Résultat final

$$1+\left(1-i\right)+\left(1-i\right)^2+\ldots+\left(1-i\right)^{2010}=\sum_{n=0}^{2010}\left(1-i\right)^n=2^{1005}-i\left(1+2^{1005}\right)$$