1. Démontrer par récurrence que pour tout entier n non nul, on a :

$$1+2i+3i^2+\ldots+ni^{n-1}=\frac{-(n+1)i^{n+1}-ni^n+i}{2}$$

2. En déduire que pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$1-3+5-7+\ldots+(-1)^k(2k+1)=(-1)^k(k+1)$$

$$2-4+6-\ldots+(-1)^{k-1}2k=\frac{1-(-1)^k(2k+1)}{2}$$

Analyse

Deux sommes pour le prix d'une ! Comme bien souvent avec les complexes, le calcul (récurrence ici) d'une somme va en fait nous fournir deux résultats en considérant parties réelle et imaginaire. La récurrence n'est pas difficile mais les manipulations des exposants, des expressions doivent être menées avec soin.

Résolution

1. Notons $\mathscr{P}_n$: "$1+2i+3i^2+\ldots+ni^{n-1}=\dfrac{-(n+1)i^{n+1}-ni^n+i}{2}$".

   Initialisation.

   Pour $n=1$, la somme correspondant au membre de gauche vaut … 1.

   Par ailleurs : $\dfrac{-(n+1)i^{n+1}-ni^n+i}{2}=\dfrac{-2i^2-i+i}{2}=\dfrac{-2\times(-1)}{2}=1$.

   Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_1$ est vraie.

   Hérédité.

   Soit n entier naturel non nul quelconque fixé. Nous supposons $\mathscr{P}_n$ vraie.

On s'intéresse alors à la somme : $1+2i+3i^2+...+ni^{n-1}+(n+1)i^n$.

On a, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}1+2i+3i^2+...+ni^{n-1}+(n+1)i^n &= \frac{-(n+1)i^{n+1}-ni^n+i}{2}+(n+1)i^n \\ &= \frac{-(n+1)i^{n+1}-ni^n+i+2(n+1)i^n}{2} \\ &= \frac{(n+2)i^n-(n+1)i^{n+1}+i}{2}\end{aligned}$$

En tenant compte de $i^2=-1$, il vient alors :

$$\begin{aligned}1+2i+3i^2+...+ni^{n-1}+(n+1)i^n &= \frac{(n+2)i^n-(n+1)i^{n+1}+i}{2} \\ &= \frac{-i^2(n+2)i^n-(n+1)i^{n+1}+i}{2} \\ &= \frac{-(n+2)i^{n+2}-(n+1)i^{n+1}+i}{2} \\ &= \frac{-((n+1)+1)i^{(n+1)+1}-(n+1)i^{n+1}+i}{2}\end{aligned}$$

On constate ainsi que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion générale : la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel *n* non nul :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1+2i+3i^2+...+ni^{n-1}=\frac{-(n+1)i^{n+1}-ni^n+i}{2}}$$

2. Pour tout entier naturel k non nul, en posant : $n=2k+1$ (qui est non nul en tant qu'entier impair), le résultat précédent nous donne :

$$1+2i+3i^2+...+((2k+1)-1)\times i^{(2k+1)-2}+(2k+1)i^{(2k+1)-1}=\frac{-((2k+1)+1)i^{(2k+1)+1}-(2k+1)i^{2k+1}+i}{2}\Leftrightarrow$$

$$1+2i+3i^2+...+2k\times i^{2k-1}+(2k+1)i^{2k}=\frac{-(2k+2)i^{2k+2}-(2k+1)i^{2k+1}+i}{2}\Leftrightarrow$$

$$1+2i+3i^2+...+2k\times i^{2(k-1)+1}+(2k+1)(i^2)^k=\frac{-(2k+2)(i^2)^k i^2-(2k+1)(i^2)^k i+i}{2}\Leftrightarrow$$

$$1+2i+3i^2+...+2k(i^2)^{k-1}i+(2k+1)(-1)^k=\frac{(2k+2)(-1)^k-(2k+1)(-1)^k i+i}{2}\Leftrightarrow$$

$$1+2i+3i^2+...+2k(-1)^{k-1}i+(2k+1)(-1)^k=(k+1)(-1)^k+\frac{1-(2k+1)(-1)^k}{2}i$$

En tenant compte du fait que toute puissance d'exposant pair (respectivement impair) de i est réelle (respectivement imaginaire pure), on peut facilement identifier les parties réelles et imaginaires des complexes de cette égalité :

$$1+2i+3i^2+\ldots+\left(\left(2k+1\right)-1\right)\times i^{(2k+1)-2}+\left(2k+1\right)i^{(2k+1)-1}=\frac{-\left(\left(2k+1\right)+1\right)i^{(2k+1)+1}-\left(2k+1\right)i^{2k+1}+i}{2}\Leftrightarrow$$

$$1+2i+3i^2+\ldots+2k\left(-1\right)^{k-1}i+\left(2k+1\right)\left(-1\right)^k=\left(k+1\right)\left(-1\right)^k+\frac{1-\left(2k+1\right)\left(-1\right)^k}{2}i\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}1-3+5-7+\ldots+\left(2k+1\right)\left(-1\right)^k=\left(k+1\right)\left(-1\right)^k\\ 2-4+6-\ldots+2k\left(-1\right)^{k-1}=\dfrac{1-\left(2k+1\right)\left(-1\right)^k}{2}\end{cases}$$

On obtient ainsi le résultat demandé.

Résultat final

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1+2i+3i^2+\ldots+ni^{n-1}=\frac{-\left(n+1\right)i^{n+1}-ni^n+i}{2}$$

et :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \begin{cases}1-3+5-7+\ldots+\left(2k+1\right)\left(-1\right)^k=\left(k+1\right)\left(-1\right)^k\\ 2-4+6-\ldots+2k\left(-1\right)^{k-1}=\dfrac{1-\left(2k+1\right)\left(-1\right)^k}{2}\end{cases}$$