

Résoudre :

$$\arg(z-2) = \arg(z+5i)$$

Analyse

On doit commencer par préciser l'ensemble dans lequel on cherche les solutions. Ensuite, une propriété élémentaire de l'argument nous permet de simplifier l'équation.

Résolution

Les arguments sont définis dès lors que le complexe z vérifie $z-2 \neq 0$ et $z+5i \neq 0$, c'est-à-dire $z \neq 2$ et $z \neq -5i$. On cherche donc les solutions dans : $\mathbb{C} - \{2; -5i\}$.

Pour tout complexe de cet ensemble, on a alors :

$$\begin{aligned} \arg(z-2) - \arg(z+5i) &= 0 \\ \Leftrightarrow \arg \frac{z-2}{z+5i} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overline{AM}, \overline{BM}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overline{MA}, \overline{MB}) &= 0 \end{aligned}$$

Où A est le point d'affixe $-5i$, B le point d'affixe 2 et M le point d'affixe z .

Cette égalité signifie que les vecteurs \overline{MA} et \overline{MB} sont colinéaires et de même sens. Ainsi, le point M appartient-il à la droite (AB) privée du segment $[AB]$. Ceci équivaut à dire que M

est barycentre de $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline t & 1-t \end{array} \right)$ avec $t \in \mathbb{R} \setminus [0;1]$, soit : $\overline{OM} = t\overline{OA} + (1-t)\overline{OB}$ avec $t \in \mathbb{R} \setminus [0;1]$

. En passant aux affixes, il vient alors : $z = t \times (-5i) + (1-t) \times 2 = 2(1-t) - 5ti$.

En définitive, l'ensemble solution \mathcal{S} est :

$$\mathcal{S} = \{z = 2(1-t) - 5ti, t \in \mathbb{R} \setminus [0;1]\}$$

Résultat final

L'ensemble des solutions de l'équation $\arg(z-2) = \arg(z+5i)$ est l'ensemble :

$$\mathcal{S} = \{z = 2(1-t) - 5ti, t \in \mathbb{R} \setminus [0;1]\}$$