

On considère les points  $A(4+2i)$ ,  $B(-2+i)$  et  $C(-2i)$ .

Déterminer l'affixe  $h$  de l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$ .

---

## Analyse

On utilise le fait que l'orthocentre est le point de concours des trois hauteurs. En fait, on utilise seulement le fait que  $H$  appartient à deux d'entre elles, cette appartenance s'exprimant, pour une hauteur donnée, sous la forme de l'orthogonalité de deux vecteurs.

---

## Résolution

En guise de préambule, précisons que nous noterons classiquement  $a$ ,  $b$  et  $c$  les affixes respectives des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

Le point  $H$  étant un point de la hauteur issue de  $A$  du triangle  $ABC$ , on a :

$$(\overline{BC}, \overline{AH}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

Comme  $(\overline{BC}, \overline{AH}) = \arg \frac{h-a}{c-b} [2\pi]$ , on en déduit immédiatement que le complexe  $\frac{h-a}{c-b}$  est un imaginaire pur. On a donc :

$$\overline{\left(\frac{h-a}{c-b}\right)} = -\frac{h-a}{c-b}$$

Soit :

$$\frac{\bar{h} - \bar{a}}{\bar{c} - \bar{b}} = -\frac{h-a}{c-b}$$

D'où :

$$(\bar{c} - \bar{b})h + (c-b)\bar{h} = (\bar{c} - \bar{b})a + (c-b)\bar{a} = 2\operatorname{Re}[(\bar{c} - \bar{b})a] \quad (1)$$

Avec les valeurs de l'énoncé, on obtient :  $c-b = -2i - (-2+i) = 2-3i$  et, de fait,  $\bar{c} - \bar{b} = \overline{c-b} = 2+3i$ . D'où :  $(\bar{c} - \bar{b})a = (2+3i)(4+2i) = 8+4i+12i-6 = 2+16i$ .

L'équation (1) se réécrit alors :

$$(2+3i)h+(2-3i)\bar{h}=2\operatorname{Re}\left[(\bar{c}-\bar{b})a\right]=2\operatorname{Re}(2+16i)=4$$

Le point H étant également un point de la hauteur issue de B du triangle ABC, on a :

$$\left(\overline{AC}, \overline{BH}\right)=\frac{\pi}{2} [\pi]$$

Comme ci-dessus, on en tire alors :

$$\frac{\bar{h}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}}=-\frac{h-b}{c-a}$$

Egalité qui donne :

$$(\bar{c}-\bar{a})h+(c-a)\bar{h}=(\bar{c}-\bar{a})b+(c-a)\bar{b}=2\operatorname{Re}\left[(\bar{c}-\bar{a})b\right] \quad (2)$$

Numériquement, on obtient :

$$(-4+4i)h+(-4-4i)\bar{h}=2\operatorname{Re}\left[(\bar{c}-\bar{a})b\right]=2\operatorname{Re}(4-12i)=8$$

Soit, après simplification :

$$(-1+i)h+(-1-i)\bar{h}=2$$

Finalement, on dispose du système :

$$\begin{cases} (2+3i)h+(2-3i)\bar{h}=4 & (a) \\ (-1+i)h-(1+i)\bar{h}=2 & (b) \end{cases}$$

La combinaison  $(1+i)\times(a)+(2-3i)\times(b)$  donne :

$$\left[(1+i)\times(2+3i)+(-1+i)\times(2-3i)\right]h=4(1+i)+2(2-3i)$$

Soit :

$$\left[-(-1-i)\times(2+3i)+(-1+i)\times(2-3i)\right]h=8-2i$$

Or :

$$\begin{aligned} -(-1-i)\times(2+3i)+(-1+i)\times(2-3i) &= (-1+i)\times(2-3i)-\overline{(-1+i)\times(2-3i)} \\ &= 2i\times\operatorname{Im}\left[(-1+i)\times(2-3i)\right] \\ &= 2i\times\operatorname{Im}(1+5i) \\ &= 10i \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } 10i\times h=8-2i, \text{ soit : } h=\frac{8-2i}{10i}=\frac{4-i}{5i}=\frac{-i\times(4-i)}{5}=\frac{-1-4i}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{4}{5}i.$$

---

## Résultat final

L'affixe de l'orthocentre H du triangle ABC où  $A(4+2i)$ ,  $B(-2+i)$  et  $C(-2i)$  vaut :

$$-\frac{1}{5} - \frac{4}{5}i$$

---

## Complément

A titre de complément, nous fournissons une représentation graphique du triangle ABC, de ses trois hauteurs et de leur point de concours : H.

