Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^8 - 2\left(i\sqrt{3}-1\right)z^4 - 8\left(1+i\sqrt{3}\right) = 0$$

Représenter, dans le plan complexe, les points ayant pour affixes les solutions de cette équation.

(D'après BAC E – Poitiers – 1974)

Analyse

La forme de l'équation suggère, dans un premier temps, d'effectuer un changement de variable pour se ramener à une équation du second degré …

Résolution

Posons $Z = z^4$. L'équation initiale se récrit alors :

$$Z^2 - 2\left(i\sqrt{3}-1\right)Z - 8\left(1+i\sqrt{3}\right) = 0$$

On est ainsi ramené à la résolution d'une équation du second degré (en la variable complexe *Z*).

Le discriminant s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left[2\left(i\sqrt{3}-1\right)\right]^2 - 4\times\left[-8\left(1+i\sqrt{3}\right)\right] \\
&= 4\left[\left(i\sqrt{3}-1\right)^2 + 8\left(1+i\sqrt{3}\right)\right] \\
&= 4\left(-3-2i\sqrt{3}+1+8+8i\sqrt{3}\right) \\
&= 4\left(6+6i\sqrt{3}\right) = 24\left(1+i\sqrt{3}\right) \\
&= 48\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 48e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&= \left(4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2
\end{aligned}$$

On en tire immédiatement les deux solutions de l'équation :

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{1}{2}\left[2\left(i\sqrt{3}-1\right)+4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[2\left(i\sqrt{3}-1\right)+4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[2i\sqrt{3}-2+6+2i\sqrt{3}\right]=\frac{1}{2}\left[4+4i\sqrt{3}\right]\\
&= 2\left(1+i\sqrt{3}\right)=4\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 4e^{i\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_2 &= \frac{1}{2}\left[2\left(i\sqrt{3}-1\right)-4\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[2i\sqrt{3}-2-6-2i\sqrt{3}\right]\\
&= \frac{1}{2}\times\left(-8\right)=-4\\
&= 4e^{i\pi}
\end{aligned}$$

On doit désormais résoudre les deux équations :

$$z^4 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z^4 = 4e^{i\pi}$$

Résolution de $z^4 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On pose classiquement : $z = re^{i\theta}$ (avec $r > 0$). On a alors : $z^4 = \left(re^{i\theta}\right)^4 = r^4e^{4i\theta}$. D'où :

$$z^4 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow r^4e^{4i\theta} = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\theta = \dfrac{\pi}{3}\ \left[2\pi\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{12}\ \left[\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

On obtient les quatre solutions suivantes :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\\
z_2 &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\\
z_3 &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}\\
z_4 &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}
\end{aligned}$$

Résolution de $z^4 = 4e^{i\pi}$.

On procède comme ci-dessus et on obtient :

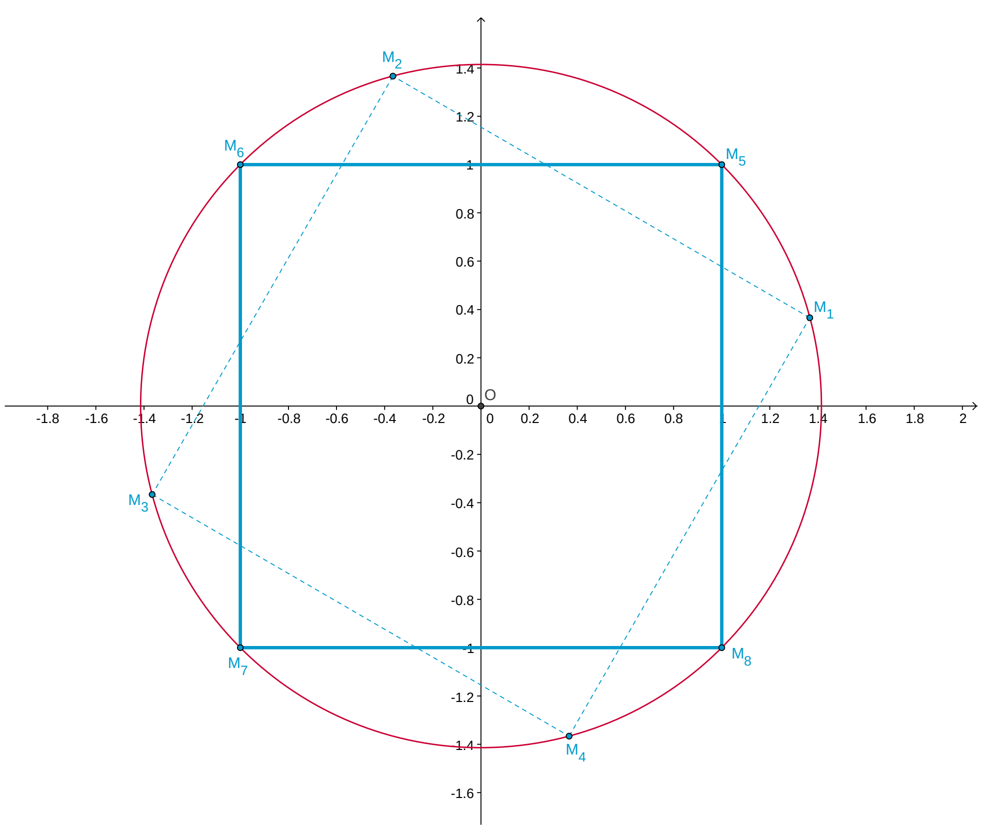
$$z^4 = 4e^{i\pi} \Leftrightarrow r^4 e^{4i\theta} = 4e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\theta = \pi \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \left[\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

On obtient les quatre autres solutions suivantes :

$$z_5 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1+i$$
$$z_6 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1+i$$
$$z_7 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1-i$$
$$z_8 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = 1-i$$

Notons $M_1, M_2, ..., M_8$ les points d'affixes respectives $z_1, z_2, ..., z_8$.
Comme $|z_1| = |z_2| = ... = |z_8| = \sqrt{2}$, on peut affirmer que ces huit points sont situés sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ dans le plan complexe.

On obtient :



Résultat final

Les solutions de l'équation $Z^2-2\left(i\sqrt{3}-1\right)Z-8\left(1+i\sqrt{3}\right)=0$ sont les huit complexes :

$$z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$
$$z_2=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$
$$z_3=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$$
$$z_4=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$$
$$z_5=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=1+i$$
$$z_6=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=-1+i$$
$$z_7=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=-1-i$$
$$z_8=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}=1-i$$