

Soit a et b deux réels.

On considère, dans le plan complexe, les points

$R((-2a+3b)+(6a-1)i)$, $S((-3ab-5)+(-a+3b)i)$ et

$T((a-7b+2)+(a-6b+1)i)$.

On note g l'affixe du centre de gravité G du triangle RST .

1. A quelle condition sur les réels a et b , le point G est-il situé sur l'axe des abscisses ?
2. A quelle condition sur les réels a et b , le point G est-il situé sur l'axe des ordonnées ?
3. A quelle condition sur les réels a et b , le point G est-il situé à l'origine du repère ?

Analyse

Le centre de gravité d'un triangle n'est rien d'autre que l'isobarycentre de ses trois sommets ...

Résolution

Notons r , s et t les affixes respectives des points R , S et T .

Soit alors g l'affixe de G .

Le point G étant l'isobarycentre des points R , S et T , on a :

$$g = \frac{1}{3}(r + s + t)$$

Question 1.

Le point G est situé sur l'axe des abscisses si, et seulement si, son affixe est un réel c'est-à-dire si, et seulement si : $\text{Im}(g) = 0$.

$$\text{Or : } \text{Im}(g) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}\left[\frac{1}{3}(r + s + t)\right] = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(r + s + t) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}r + s + t &= [(-2a + 3b) + (-3ab - 5) + (a - 7b + 2)] + i[(6a - 1) + (-a + 3b) + (a - 6b + 1)] \\ &= (-a - 3ab - 4b - 3) + i(6a - 3b)\end{aligned}$$

On en tire : $\text{Im}(r + s + t) = 6a - 3b$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\text{Im}(g) &= 0 \\ \Leftrightarrow \text{Im}(r + s + t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6a - 3b &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= 2a\end{aligned}$$

L'affixe du point G est un réel si, et seulement si on a :
 $b = 2a$

Question 2.

Le point G est situé sur l'axe des ordonnées si, et seulement si, son affixe est un imaginaire pur c'est-à-dire si, et seulement si : $\text{Re}(g) = 0$.

$$\text{Or : } \text{Re}(g) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}\left[\frac{1}{3}(r + s + t)\right] = 0 \Leftrightarrow \text{Re}(r + s + t) = 0.$$

A la question précédente, on a vu que l'on avait : $r + s + t = (-a - 3ab - 4b - 3) + i(6a - 3b)$.

On en tire : $\text{Re}(r + s + t) = -a - 3ab - 4b - 3$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\text{Re}(g) &= 0 \\ \Leftrightarrow \text{Re}(r + s + t) &= 0 \\ \Leftrightarrow -a - 3ab - 4b - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a + 3ab + 4b + 3 &= 0\end{aligned}$$

L'affixe du point G est un imaginaire pur si, et seulement si on a :
 $a + 3ab + 4b + 3 = 0$

Question 3.

Dire que le point G est situé à l'origine du repère équivaut à dire que son affixe est nulle, soit encore qu'elle est à la fois réelle et imaginaire pur. Les deux conditions obtenues aux questions précédentes doivent donc être simultanément vérifiées.

D'après ce qui précède, on doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} b = 2a \\ a + 3ab + 4b + 3 = 0 \end{cases}$$

On peut facilement procéder par substitution :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} b = 2a \\ a + 3ab + 4b + 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} b = 2a \\ a + 3a \times 2a + 4 \times 2a + 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} b = 2a \\ 6a^2 + 9a + 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} b = 2a \\ 2a^2 + 3a + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} b = 2a \\ (a+1)(2a+1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La deuxième équation nous donne deux valeurs possibles pour a : -1 et $-\frac{1}{2}$.

Les valeurs correspondantes sont alors : $-1 \times 2 = -2$ et $-\frac{1}{2} \times 2 = -1$.

Le point G est situé à l'origine du repère si, et seulement si on a :

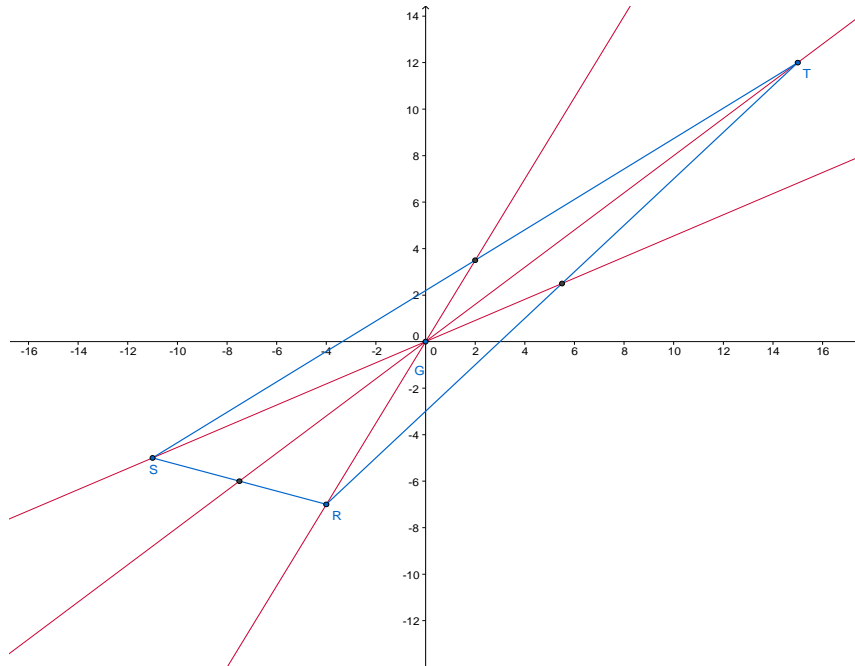
$$(a; b) = (-1; -2) \text{ ou } (a; b) = \left(-\frac{1}{2}; -1\right)$$

Complément

A titre de complément, nous fournissons, pour chacune des situations obtenues à la question 3, les affixes des points R, S et T et une figure correspondante (à chaque fois, on fait apparaître les trois médianes et le point G).

$$(a; b) = (-1; -2)$$

On calcule facilement : $R(-4-7i)$, $S(-11-5i)$ et $T(15+12i)$. D'où la figure :



$$(a; b) = \left(-\frac{1}{2}; -1\right)$$

On a cette fois : $R(-2-4i)$, $S\left(-\frac{13}{2}-\frac{5}{2}i\right)$ et $T\left(\frac{17}{2}+\frac{13}{2}i\right)$. D'où la figure :

