Soit $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$ et soit z le complexe défini par :

$$z = 1 + i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

1. Déterminer le module et l'argument de z.

On pose : $z' = \frac{z}{1-z}$.

2. Déterminer le module et l'argument de z'.

Analyse

Un exercice où la forme trigonométrique joue un rôle déterminant. Le paramètre θ doit conduire à la prudence : a-t-on soigneusement identifié le module du complexe considéré ?

Résolution

Question 1.

On a : $z = 1 + i\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta + i\cos\theta)$.

On a immédiatement : $|\sin\theta + i\cos\theta| = 1$ et on en déduit :

$$|z| = \left|\frac{1}{\sin\theta}\right| \times |\sin\theta + i\cos\theta| = \frac{1}{|\sin\theta|}$$

Comme $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, on a : $\sin\theta > 0$ et, finalement : $|z| = \frac{1}{|\sin\theta|} = \frac{1}{\sin\theta}$.

Il vient ensuite :

$$z = 1 + i\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta + i\cos\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

L'expression est de la forme $\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $\rho > 0$, il s'agit donc de la forme trigonométrique de z et il vient : $\arg z = \frac{\pi}{2} - \theta$.

Finalement :

$$\boxed{|z| = \frac{1}{\sin\theta} \text{ et } \arg z = \frac{\pi}{2} - \theta}$$

Question 2.

On a :

$$z' = \frac{z}{1-z} = \frac{1+i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\left(1+i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)} = \frac{1+i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{-i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \frac{\sin\theta + i\cos\theta}{-i\cos\theta} = \frac{(\sin\theta + i\cos\theta)\times i}{-i\cos\theta\times i} = \frac{-\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta}$$

On a immédiatement : $|-\cos\theta + i\sin\theta| = 1$ et on en déduit :

$$|z'| = \left|\frac{-\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta}\right| = \frac{|-\cos\theta + i\sin\theta|}{|\cos\theta|} = \frac{1}{|\cos\theta|}$$

Ici, le signe de $\cos\theta$ varie suivant que $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ ou $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$. On va donc distinguer deux cas.

→ 1er cas : $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

On a : $\cos\theta > 0$ et $|z'| = \frac{1}{|\cos\theta|} = \frac{1}{\cos\theta}$.

Il vient ensuite :

$$z' = \frac{-\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}\left[\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)\right]$$

L'expression est de la forme $\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $\rho > 0$, il s'agit donc de la forme trigonométrique de z' et il vient : $\arg z = \pi - \theta$.

→ 2ème cas : $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$

On a cette fois : $\cos\theta < 0$ et $|z'| = \frac{1}{|\cos\theta|} = -\frac{1}{\cos\theta}$.

Il vient ensuite :

$$z' = \frac{-\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta - i\sin\theta) = -\frac{1}{\cos\theta}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

L'expression est de la forme $\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $\rho > 0$, il s'agit donc de la forme trigonométrique de z' et il vient : $\arg z = -\theta$.

En définitive :

- Si $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $|z'| = \frac{1}{\cos\theta}$ et $\arg z = \pi - \theta$.
- Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, on a : $|z'| = -\frac{1}{\cos\theta}$ et $\arg z = -\theta$.

Résultat final

$$|z| = \frac{1}{\sin\theta} \text{ et } \arg z = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\text{Si } \theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[, \text{ on a : } |z'| = \frac{1}{\cos\theta} \text{ et } \arg z = \pi - \theta$$

$$\text{Si } \theta \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[, \text{ on a : } |z'| = -\frac{1}{\cos\theta} \text{ et } \arg z = -\theta$$