Pour tout entier naturel n, calculer :

$$S_n = \sum_{2k \le n} (-3)^k \binom{n}{2k}$$

Analyse

L'indexation de la somme peut dérouter. Assez naturellement, on peut alors vouloir écrire $(-3)^k$ sous la forme d'une puissance d'exposant $2k$ …

Résolution

Comme $-3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$, il vient :

$$S_n = \sum_{2k \le n} (-3)^k \binom{n}{2k} = \sum_{2k \le n} \left(i\sqrt{3}\right)^{2k} \binom{n}{2k} = \sum_{2k \le n} \binom{n}{2k} \left(i\sqrt{3}\right)^{2k} 1^{n-2k}$$

Ainsi, la somme $\sum_{2k \le n} \binom{n}{2k} \left(i\sqrt{3}\right)^{2k} 1^{n-2k}$ correspond aux termes comportant une puissance paire de $i\sqrt{3}$ apparaissant dans le développement $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(i\sqrt{3}\right)^{j} 1^{n-j}$ qui n'est rien d'autre que le développement de $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$.

Les puissances paires de $i\sqrt{3}$ donnant un nombre réel et les puissances impaires un imaginaire pur, il vient immédiatement : $\sum_{2k \le n} \binom{n}{2k} \left(i\sqrt{3}\right)^{2k} 1^{n-2k} = \mathrm{Re}\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^n\right)$.

Or :

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n = \left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = 2^n e^{\frac{in\pi}{3}} = 2^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Ainsi : $\mathrm{Re}\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^n\right) = 2^n \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$.

Le résultat obtenu est valable pour tout entier naturel n.

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{2k \le n} (-3)^k \binom{n}{2k} = 2^n \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$$